제 36회 전국 대학생 수학경시대회 (제 1 분야 풀이)

1. 집합 $S = \{1, 2, \ldots, 2017\}$ 의 원소들을 성분으로 가지는 모든 $n \times n$ 행렬들의 집합을 T 라고 하자. 다음 값을 계산하여라. (단, n 은 2 이상의 양의 정수이다.)

$$\sum_{A \in T} \det(A)$$

(풀이) T의 원소들 중에서 첫 번째 행과 두 번째 행이 같은 행렬들의 집합을 T_1이라고 하고 $T_2 := T - T_1$ 이라고 하자. 이제 $\varphi : T_2 \to T_2$를

$$\varphi(A) = A\text{의 첫 번째 행과 두 번째 행을 바꾼 행렬}$$

로 보내는 함수라고 정의하면 φ가 일대일 대응 함수임을 알 수 있다. 또한 $A \in T_1$에 대해서는 $\det(A) = 0$ 이고 $A \in T_2$에 대해서는 $\det(\varphi(A)) = -\det(A)$이다. 따라서,

$$\sum_{A \in T_2} \det(A) = \sum_{A \in T_2} \det(\varphi(A)) = -\sum_{A \in T_2} \det(A)$$

이므로 $\sum_{A \in T_2} \det(A) = 0$이 된다. 그러므로 구하는 답은

$$\sum_{A \in T} \det(A) = \sum_{A \in T_1} \det(A) + \sum_{A \in T_2} \det(A) = 0$$

임을 알 수 있다.

2. 임의의 실계수 다항식 $f(x, y)$는 $(x + ay)^k$ 꼴의 다항식들의 실계수 일차결합으로 표현됨을 보여라. (단, a는 임의의 실수, k는 0 이상의 정수이다.)

(풀이) 임의의 0이상의 정수 k를 고정하자. 실수 a에 대하여 $(x + ay)^k$를 이항전개하면

$$(x + ay)^k = (1, a, a^2, \cdots, a^{k-1}) \cdot (x^k, {}_kC_1 x^{k-1} y, {}_kC_2 x^{k-2} y^2, \cdots, y^k)$$

이다. 이 때, a에 서로 다른 k개의 실수 $a_1, \ldots, a_k$를 대입하여 연립하면

$$\begin{pmatrix} (x + a_1 y)^k \\ (x + a_2 y)^k \\ \vdots \\ (x + a_k y)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{k-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_k & a_k^2 & \cdots & a_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^k \\ {}_kC_1 x^{k-1} y \\ \vdots \\ y^k \end{pmatrix}$$

이 된다. 오른쪽 항의 정사각행렬은 Vandermonde 행렬로서 판별식이 0이 아니다. 따라서 $x^{k-l} y^k$ $(0 \le l \le k)$는 $(x + a_i y)^k$ $(1 \le i \le k)$의 실계수 일차결합으로 쓸 수 있다. 그러므로 임의의 실계수 다항식 $f(x, y)$는 $(x + ay)^k$ 꼴의 다항식들의 실계수 일차결합으로 표현된다.

3. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 > 1$이고 점화식 $a_{n+1} = 1 + \dfrac{n^2}{a_n}$을 만족할 때, 극한 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{n}$을 구하여라.

(풀이) 수열 $\{b_n\}$을 $b_n = \dfrac{a_n}{n}$이라 정의하자. 가정에 의하여 $b_1 > 1$이고

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{b_n}$$

을 만족한다. 또한

$$b_{n+2}-1=\frac{n(n+1)}{(n+2)(b_n+n)}(b_n-1)$$

을 만족한다. 따라서

$$0<b_{2n+1}-1=\frac{(2n-1)2n}{(2n+1)(b_{2n-1}+2n-1)}(b_{2n-1}-1)<\frac{2n-1}{2n+1}(b_{2n-1}-1)$$

이 성립한다. 그러므로 $0<b_{2n+1}-1<\frac{1}{2n+1}(b_1-1)$로부터 샌드위치 정리에 정리에 의하여 $\lim_{n\to\infty} b_{2n+1}=1$ 이 성립한다. 또한

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{b_{2n-1}}\right)=1$$

이 성립하므로 주어진 극한은 1이다.

4. 실계수 3차 다항식 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 세 근을 α,β,γ라 하자. 세 근 α,β,γ가 서로 다른 세 실수이기 위한 필요충분조건은 실대칭행렬

$$\begin{pmatrix} 3 & p_1 & p_2 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}$$

이 양의 정부호(positive definite)임을 보여라. (단, $p_i=\alpha^i+\beta^i+\gamma^i$ 이다.)

(풀이) 주어진 행렬은

$$P:=\begin{pmatrix} 3 & p_1 & p_2 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$$

으로 쓸 수 있다. Vandermonde 행렬의 행렬식 공식에 의하여, 주어진 행렬의 행렬식 $D=\det(P)$는

$$D=(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$$

이다. 방정식 $f(x)=0$의 세 근 α,β,γ가 서로 다른 세 실수라고 하자. 그러면 위 식에 의하여 $D>0$이고

$$3p_2-p_1^2=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha+\beta+\gamma)^2=(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2>0$$

이므로 주어진 행렬은 양의 정부호이다. 이제 주어진 행렬이 양의 정부호라고 하자. 가정에 의하여 $D>0$ 이므로 세 근은 서로 달라야 한다. 이제주어진 방정식이 복소수 근을 갖는다고 가정하자. 삼차방정식은 적어도 한 개의 실근을 가지므로 일반성을 잃지 않고, α는 실수이며 $\beta=a+bi,\gamma=a-bi$ (a,b는 실수)라 하자 . 그러면

$$(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2=(\alpha^2-2a\alpha+a^2+b^2)(-4b^2)\le 0$$

이므로 가정에 모순이다. 따라서 주어진 행렬이 양의 정부호이기 위해서는 세 근 α,β,γ가 서로 다른 실수이어야 한다.

5. 다음 극한을 계산하여라.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\pi}\sin^n x\,dx$$

(풀이) 우선 $I_n=\int_0^{\pi}\sin^n x\,dx$ 라 하면, $I_0=\pi$, $I_1=2$이고 부분적분에 의하여, $n\ge 2$일 때, 다음 점화식

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

을 얻는다. 이로부터 $I_nI_{n-1} = I_1I_0/n = 2\pi/n$를 얻는다. 적분구간에서 $0 \le \sin x \le 1$이므로 $\{I_n\}$은 감소수열이고,

$$\frac{2\pi}{n+1} = I_{n+1}I_n \le I_n^2 \le I_nI_{n-1} = \frac{2\pi}{n}$$

이 성립한다. 따라서 샌드위치 정리에 의하여 극한값은 $\sqrt{2\pi}$이다.

6. 양의 정수 n에 대하여 $n \times n$ 실행렬 A는 모든 성분이 1인 행렬 J에 대하여 다음을 만족한다.

$$A + A^T = \frac{1}{n}J, \quad AJ = \frac{1}{2}J$$

모든 양의 홀수 m에 대하여 $A^m - I$가 가역행렬임을 보여라. (단, A^T는 A의 전치행렬이다.)

(풀이) 우선 $B + B^T = \alpha J$이고 $\alpha \le \frac{1}{n}$을 만족하는 임의의 $n \times n$ 실행렬 B에 대하여 $B - I$가 가역임을 보이자. $Bx - x = 0$인 벡터 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$가 존재한다고 가정하자. 그러면

$$(x^TB^T - x^t)(Bx - x) = x^TB^TBx + x^Tx - x^T(B^T + B)x = x^TB^TBx + x^Tx - x^T(\alpha J)x = 0$$

이 성립한다. 또한 코시-슈바르츠(Cauchy-Schwartz) 부등식에 의하여

$$x^Tx - x^T(\alpha J)x = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - \alpha(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \ge 0$$

이고 $x^TB^TBx = |Bx|^2 \ge 0$이므로 $x = 0$이어야 한다. 따라서 $B - I$는 가역행렬이다. 이제 홀수 m에 대하여 $A^m + (A^m)^T = \mu_m J$라 하자. 주어진 식으로 부터 $A^2 = -AA^T + \frac{1}{2n}J$이므로 A^2은 대칭행렬이다. 또한

$$A^{m+2} = -A^2(A^m)^T + \frac{\mu_m}{4}J$$

를 만족하므로

$$(A^{m+2})^T = -A^m(A^2)^T + \frac{\mu_m}{4}J = -A^{m+2} + \frac{\mu_m}{4}J$$

가 성립한다. 따라서 모든 양의 정수 k에 대하여 $A^{2k-1} + (A^{2k-1})^T = \frac{1}{4^kn}J$를 만족한다. 그러므로 앞의 관찰에 의하여 $A^{2k-1} - I$는 가역행렬이다.

7. 수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 양수인 감소하는 수열이고, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다. 다음이 성립함을 보여라.

$$\left|\sum_{n=1}^{2017} a_n \cos n\theta\right| \le \frac{\pi a_1}{\theta}$$

(풀이) 임의의 양의 정수 N에 대하여

$$\sum_{n=1}^{N} \cos n\theta = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta}{2\sin\theta} = \frac{\sin(N+1)\theta + \sin N\theta - \sin\theta}{2\sin\theta}$$
$$= \frac{\sin(N\theta/2)\cos((N+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

이므로

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \cos n\theta\right| \le \frac{1}{\sin(\theta/2)} \le \frac{\pi}{\theta}$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{N} a_n \cos n\theta\right| &= \left|\sum_{n=1}^{N-1}\left[(a_n - a_{n+1})\sum_{j=1}^{n}\cos j\theta\right] + a_N\sum_{j=1}^{N}\cos j\theta\right| \\ &\le \sum_{n=1}^{N-1}(a_n - a_{n+1})\left|\sum_{j=1}^{n}\cos j\theta\right| + a_N\left|\sum_{j=1}^{N}\cos j\theta\right| \\ &\le \sum_{n=1}^{N-1}(a_n - a_{n+1})\frac{\pi}{\theta} + a_N\frac{\pi}{\theta} = \frac{\pi a_1}{\theta}\end{aligned}$$

이 성립한다.

8. 다음 미분방정식의 해를 $u(t)$ 라고 하자.

$$\begin{cases} u''(t) + u'(t) = \sin u(t) \quad (t > 0), \\ u(0) = 1,\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

(1) 함수 $u(t)$ 와 $u'(t)$ 가 $t > 0$ 인 범위에서 유계임을 보여라.

(2) 극한 $\lim_{t\to\infty} u(t)$ 를 구하여라.

(풀이) (a) 우선 $v(t) := u'(t)$로 두자. 그러면 $(u(0), v(0)) = (1, 0)$ 이고

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -v + \sin u \end{pmatrix}$$

이다. 따라서

$$-e^t \le [e^t v(t)]' = e^t \sin u(t) \le e^t$$

임을 알 수 있다. 이를 적분하여

$$|v| \le 1 - e^{-t} \le 1$$

를 얻는다. 또한 $w(t) := 2\cos u(t) + (v(t))^2$으로 두면

$$w' = -2u' \sin u + 2vv' = 2v \sin u + 2v(-v + \sin u) = -2v^2$$

이므로, $w(t)$는 감소함수이다. 이로부터

$$\cos u(t) \le \cos u(t) + (v(t))^2/2 \le \cos u(0) + (v(0))^2/2 = \cos 1$$

을 알 수 있다. 따라서 $u(t)$의 연속성을 이용하여, 모든 $t \ge 0$에 대하여

$$1 \le u(t) \le 2\pi - 1$$

임을 얻는다.

(b) 함수 $w(t)$는 감소함수이면서 $w(t) \ge -2$이므로, $\lim_{t\to\infty} w(t) := \beta$ 가 존재한다. 또한

$$\frac{w(t) - w(t-1)}{1} \le \lim_{h\to 0}\frac{w(t) - w(t-h)}{h} = w'(t) \le 0$$

이고, $t \to \infty$이면

$$\lim_{t\to\infty} w'(t) = \lim_{t\to\infty} v(t) = 0$$

이다. 그리고 $\lim_{t\to\infty} \cos u(t) = \beta/2$이다.

이 때, $\beta > -2$라고 가정하자. 그러면 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 어떤 t_0가 존재하여, $t > t_0$인 모든 t 에 대하여

$$\cos u(t) > \beta/2 - \epsilon, \quad |v(t)| < \epsilon$$

이다. 여기에서 $\beta/2 - \epsilon > -1$이 되도록 ϵ이 충분히 작다고 가정한다. 그러면

$$\sin u(t) > \sqrt{1 - (\beta/2 - \epsilon)^2}$$

이거나

$$\sin u(t) < -\sqrt{1 - (\beta/2 - \epsilon)^2}$$

인 두가지 경우가 생긴다. 만약 $\sin u(t) > \sqrt{1 - (\beta/2 - \epsilon)^2}$이면 충분히 작은 ϵ에 대하여

$$v' > \sqrt{1 - (\beta/2 - \epsilon)^2} - \epsilon > 0$$

이고, 이는 v가 유계라는 사실에 모순이다. $\sin u(t) < -\sqrt{1 - (\beta/2 - \epsilon)^2}$인 경우에도 마찬가지로 모순을 얻는다. 따라서, $\lim_{t\to\infty} \cos u(t) = -1$이고,

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \pi$$

이다.