제 36회 전국 대학생 수학경시대회 (제 2 분야)

2017년 11월 18일 (10:00 - 13:00)

---

1. 차수가 3 이하인 모든 실계수 다항식으로 이루어진 실벡터공간을 V 라 하고 선형사상 $T : V \to V$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$T(P(x)) \ = \ x^4P(x)\text{를 } (x-1)^2(x+1)^2\text{으로 나눈 나머지}$$

이 때, T 의 특성다항식을 구하여라.

(풀이) 다음과 같이 f_1, f_2, f_3, f_4를 정의하자.

$$f_1 = (x-1)^3, \ f_2 = (x-1)^2(x+1), \ f_3 = (x-1)(x+1)^2, \ f_4 = (x+1)^3.$$

실수 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$에 대해서

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

이라 하자. 위 식에 $x = 1$과 $x = -1$을 대입하면 $\lambda_1 = \lambda_4 = 0$임을 알 수 있다. 이제 이 식을 $(x-1)(x+1)$로 나눈 후에 다시 $x = 1$과 $x = -1$을 대입하면 $\lambda_2 = \lambda_2 = 0$임을 알 수 있다. 따라서 $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$는 일차독립이다. 한편, 벡터공간 V는 4차원이므로 $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$은 V의 기저이다.

다항식 $x^4f_1(x)$는 다항식 $g_1(x)$가 존재하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x^4f_1(x) = (x-1)^2(x+1)^2g_1(x) + af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) + df_4(x).$$

양변에 $x = 1$을 대입하면 $d = 0$을 얻는다. 양변을 $(x-1)$로 나눈 후에 $x = 1$을 대입하면 $c = 0$을 얻는다. 양변을 $(x-1)^2$로 나눈 식에 $x = -1$을 대입하면 $a = 1$을 얻을 수 있고, 이 식의 양변을 미분한 후에 $x = -1$을 대입하면 $b = 8$임을 알 수 있다. 같은 방법으로, $x^4f_4(x)$를 $(x-1)^2(x+1)^2$으로 나눈 나머지가 $8f_3(x) + f_4(x)$임을 보일 수 있다. 즉,

$$T(f_1) = f_1(x) + 8f_2(x) \quad \text{이고} \quad T(f_4) = 8f_3(x) + f_4(x)$$

이다. 이제 $x^4f_2(x) = (x-1)^2(x+1)^2g_2(x) + af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) + df_4(x)$라고 놓고 a, b, c, d를 구해보면, $a = c = d = 0$이고 $b = 1$을 얻게 된다. 같은 방법으로 $x^4f_3(x)$를 $(x-1)^2(x+1)^2$으로 나눈 나머지가 $f_3(x)$임을 알 수 있다. 즉,

$$T(f_2) = f_2(x) \quad \text{이고} \quad T(f_3) = f_3(x)$$

이다. 따라서 선형사상 T를 기저 $\{f_2, f_1, f_3, f_4\}$에 대해서 행렬로 나타내면

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이므로 T의 특성다항식은 $(t-1)^4$이다.

2. 다음 미분방정식의 해 $u(t)$를 구하여라.

$$\begin{cases} u'(t) = -u(t) + u(t)^2e^t \quad (t > 0), \\ u(0) = -1 \end{cases}$$

(풀이) 주어진 미분방정식 $u' + u = u^2e^t$의 양변에 e^t를 곱하면 $[e^tu(t)]' = [e^tu(t)]^2$을 얻는다. 한편, $v(t) = e^tu(t)$로 두면 $v' = v^2$이고 $\int \frac{dv}{v^2} = \int dt$이므로 $-v^{-1} = t + C$이다. 한편, $v(0) = -1$이므로 $v(t) = \frac{-1}{t+1}$이다. 따라서 구하고자 하는 미분방정식의 해는

$$u(t) = \frac{-e^{-t}}{t+1}$$

이다.

3. 양의 정수 n에 대하여 $n\times n$ 실행렬 A가 $A^{n+1}=O$을 만족하면 $A^n=O$임을 보여라. (단, O는 영행렬이다.)

(풀이) 임의의 n차원 실벡터 v에 대하여 집합 $\{v, Av, A^2v, \ldots, A^nv\}$를 생각하자. 이 집합에는 $n+1$개의 n차원 벡터가 포함되어 있으므로 선형독립일 수 없다. 따라서, $A^nv=0$이거나 어떤 $0\le k<n$에 대하여 다음 관계식을 만족시키는 실수 $c_1, c_2, \ldots$가 존재한다.

$$A^kv = c_1A^{k+1}v + c_2A^{k+2}v + \cdots + c_{n-k}A^nv.$$

양변의 왼쪽에 A^{n-k}를 곱하면, 우변의 모든 항은 A^{n+1}을 포함하게 되어 영벡터가 된다. 따라서 $A^nv=0$임을 알 수 있다. 임의의 n차원 실벡터 v에 대하여 $A^nv=0$이므로 $A^n=O$이다.

4. 계수가 유리수인 다항식 $f(x,y)$는 임의의 정수 m,n에 대하여 $f(m,n)$이 정수이다. 이 때, 다항식 $f(x,y)$는 적당한 정수 c_{ij}에 대하여 다음과 같이 표현됨을 보여라.

$$f(x,y)=\sum_{i,j\ge 0} c_{ij}\binom{x}{i}\binom{y}{j}$$

$\left(\text{단, } \binom{x}{i}=\dfrac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!} \text{ 이고 } \binom{x}{0}=1 \text{ 이다.}\right)$

(풀이) (경우 1) 변수의 개수가 하나인 경우를 생각하자. 즉 x에 대한 다항식 $f(x)$가 임의의 정수 m에 대하여 $f(m)$이 정수라고 가정하자. 먼저, $\{\binom{x}{a} \mid a\ge 0\}$은 x에 대한 임의의 다항식을 생성하므로

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2\binom{x}{2}+\cdots+a_n\binom{x}{n}$$

으로 쓸 수 있다(n은 f의 차수). 이 때,

$$f(0)=a_0,\quad f(1)=a_0+a_1,\quad f(2)=a_0+2a_1+a_2,\quad \cdots\quad f(n)=a_0+\cdots+a_n \tag{1}$$

이므로 $a_0,\ldots,a_n$은 정수이다.

(경우 2) 변수가 두 개인 경우를 생각하자. 다항식 $f(x,y)$를 y에 대하여 전개하면

$$f(x,y)=\sum_{j\ge 0} g_j(x)\binom{y}{j} \tag{2}$$

로 쓸 수 있다. 여기서 $g_j(x)$는 변수 x에 대한 유리계수 다항식이다. (식 (1) 참조.)

임의의 정수 m을 고정하면, $h(y)=f(m,y)$는 임의의 정수 n에 대하여 $h(n)$이 정수가 되고 (경우 1)에 의하여 계수 $g_j(m)$은 항상 정수가 된다. 한편 정수 m은 임의의 정수이므로 다시 (경우 1)의 결과를 적용하면 적당한 정수 c_{ij} $(i\ge 0)$에 대하여

$$g_j(x)=\sum_{i\ge 0} c_{ji}\binom{x}{i} \tag{3}$$

의 꼴로 쓸 수 있다. 그러므로 식 (2) 와 (3)에 의하여

$$f(x,y)=\sum_{i,j\ge 0} c_{i,j}\binom{x}{i}\binom{y}{j}$$

이 성립한다.

5. 행렬 $A=\begin{pmatrix}2&2&3\\0&3&3\\4&4&4\end{pmatrix}$에 대하여 실행렬 B가 $AB=BA$를 만족하면 적당한 실수 a,b,c에 대하여

$$B=aA^2+bA+cI$$

가 성립함을 보여라.

(풀이) 행렬 A의 특성다항식 $\det(tI-A)$를 계산하면 $(t+1)(t^2-10t+12)$이므로 A의 고유치들은 모두 다르다. 또한 행렬 A와 B는 $AB=BA$를 만족하므로 동시에 대각화가 가능하다. 즉, 역행렬을 갖는 3×3 행렬 S가 존재하여

$$D_1 = S^{-1}AS \quad \text{그리고} \quad D_2 = S^{-1}BS$$

가 모두 대각행렬이 되게 할 수 있다. 역으로 어떠한 대각행렬 D에 대해서도 $B=SDS^{-1}$라 두면 $AB=BA$를 만족한다. 결론적으로

$$\{B : AB=BA\} = \{SDS^{-1} : D\text{는 대각행렬}\}$$

이 성립하게 되므로 $\{B : AB=BA\}$는 3차원 벡터 공간임을 알 수 있다. 그런데 $\{B : AB=BA\}$는 이미 3차원 벡터 공간인 $\{aA^2+bA+cI : a,b,c\text{는 실수}\}$를 포함하고 있으므로

$$\{B : AB=BA\} = \{aA^2+bA+cI : a,b,c\text{는 실수}\}$$

가 성립한다. 그러므로 $AB=BA$를 만족하는 B는 $aA^2+bA+cI$로 표현할 수 있다.

6. 양의 정수 $n\,(n\geq 3)$에 대하여 $n\times n$ 실행렬 $A=(a_{ij})$가 다음 조건을 만족하면 A는 가역행렬임을 보여라.

(i) 모든 i,j에 대하여 $a_{ij}>0$이다.

(ii) 모든 i에 대하여 $2a_{ii}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$이다.

(풀이) 행렬 A의 열벡터들이 일차 독립임을 보이면 된다. $Ax=0$인 벡터 $x=(x_i)\neq 0$가 존재한다고 하자. 일반성을 잃지 않고 x_i는 실수라고 가정할 수 있다. 이제 $0\neq |x_k| = \max\{|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|\}$이라 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned} a_{kk}=|a_{kk}| &= \left|-\frac{x_1}{x_k}a_{k1}-\frac{x_2}{x_k}a_{k2}-\cdots-\frac{x_n}{x_k}a_{kn}\right| \\ &\leq \left|\frac{x_1}{x_k}\right|a_{k1}+\left|\frac{x_2}{x_k}\right|a_{k2}+\cdots+\left|\frac{x_n}{x_k}\right|a_{kn} \\ &\leq a_{k1}+a_{k2}+\cdots+a_{kn}=a_{kk}. \end{aligned}$$

등호가 성립하기 위해서는 $-x_k=x_1=x_2=\cdots=x_n$이 성립한다. 한편 정수 $j\neq k$에 대하여, $2a_{jk}=\sum_{i=1}^{n} a_{ji}=2a_{jj}$가 성립하므로 $\sum_{i\neq j,k} a_{ji}=0$이 성립한다. 가정에 의하여 $n\geq 3$이므로 이는 모순이다.

7. 수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 양수인 감소하는 수열이고, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이다. 다음이 성립함을 보여라.

$$\left|\sum_{n=1}^{2017} a_n\cos n\theta\right| \leq \frac{\pi a_1}{\theta}$$

(풀이) 임의의 양의 정수 N에 대하여

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N}\cos n\theta &= \sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(n+1)\theta-\sin(n-1)\theta}{2\sin\theta} = \frac{\sin(N+1)\theta+\sin N\theta-\sin\theta}{2\sin\theta} \\ &= \frac{\sin(N\theta/2)\cos((N+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \end{aligned}$$

이므로

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\cos n\theta\right| \leq \frac{1}{\sin(\theta/2)} \leq \frac{\pi}{\theta}$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{N} a_n \cos n\theta\right| &= \left|\sum_{n=1}^{N-1}\left[(a_n - a_{n+1})\sum_{j=1}^{n}\cos j\theta\right] + a_N\sum_{j=1}^{N}\cos j\theta\right| \\ &\le \sum_{n=1}^{N-1}(a_n - a_{n+1})\left|\sum_{j=1}^{n}\cos j\theta\right| + a_N\left|\sum_{j=1}^{N}\cos j\theta\right| \\ &\le \sum_{n=1}^{N-1}(a_n - a_{n+1})\frac{\pi}{\theta} + a_N\frac{\pi}{\theta} = \frac{\pi a_1}{\theta}\end{aligned}$$

이 성립한다.

8. 다음 극한값을 구하여라.

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)^n\,dx$$

(풀이) 먼저, $f_n(x) = (1-\sin x)^n$이라 정의하자. 구간 $(0, \frac{\pi}{2})$에서 $\sin x > \frac{x}{2}$임은 쉽게 보일 수 있으며, 따라서 $f_n(n^{-\frac{3}{4}}) = (1-\sin(n^{-\frac{3}{4}}))^n < (1-\frac{1}{2}n^{-\frac{3}{4}})^n$이 성립한다. 여기서, $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2}n^{-\frac{3}{4}})^{n^{\frac{3}{4}}} = e^{-\frac{1}{2}}$이므로, 충분히 큰 n에 대하여 $f_n(n^{-\frac{3}{4}}) < e^{-\frac{1}{2}n^{\frac{1}{4}}} < n^{-3}$이 성립함을 알 수 있다. 한편, $f_n(x)$는 $(0, \pi/2)$에서 감소함수이므로, 충분히 큰 n에 대하여 다음의 부등식을 얻는다.

$$\int_{n^{-\frac{3}{4}}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)^n\,dx < \frac{2}{n^3}.$$

같은 방법으로, 다음의 부등식을 얻는 것이 가능하다.

$$\int_{n^{-\frac{3}{4}}}^{1} (1-x)^n\,dx < \frac{2}{n^3}.$$

이제, $x \in (0, n^{-\frac{3}{4}})$에 대하여 $\sin x$의 테일러 정리를 적용하면 충분히 큰 n에 대하여 $0 < x - \sin x < n^{-\frac{9}{4}}$이며, 따라서 다음의 부등식이 성립한다.

$$\left(\frac{1-x}{1-\sin x}\right)^n = \left(1 - \frac{x-\sin x}{1-\sin x}\right)^n \ge 1 - n\left(\frac{x-\sin x}{1-\sin x}\right) \ge 1 - n^{-\frac{5}{4}}.$$

이를 통해 $(1-\sin x)^n$과 $(1-x)^n$의 차이에 관한 다음 식을 얻는다.

$$0 \le (1-\sin x)^n - (1-x)^n = (1-x)^n\left(-1 + \left(\frac{1-\sin x}{1-x}\right)^n\right) \le -1 + \frac{1}{1-n^{-\frac{5}{4}}} \le 2n^{-\frac{5}{4}}.$$

위에서 얻은 식들을 종합하면, 다음의 관계를 얻게 된다.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)^n\,dx - \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 (1-x)^n\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^{n^{-\frac{3}{4}}} (1-\sin x)^n\,dx + \int_{n^{-\frac{3}{4}}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)^n\,dx - \int_0^{n^{-\frac{3}{4}}} (1-x)^n\,dx - \int_{n^{-\frac{3}{4}}}^1 (1-x)^n\,dx\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} n\int_0^{n^{-\frac{3}{4}}} \left((1-\sin x)^n - (1-x)^n\right)\,dx = 0.\end{aligned}$$

한편, $\int_0^1 (1-x)^n\,dx = \frac{1}{n+1}$이므로, 구하는 극한값은 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$임을 알 수 있다.

(별해) 구간 $(0, \frac{\pi}{2})$에서 $0 \le \cos x \le 1$이며, $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \ge 1$이므로, 다음의 관계를 얻는다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(1-\sin x)^n \, dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)^n \, dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(1-\sin x)^{n-1} \, dx$$

치환적분을 통해 부등식의 양변을 적분하면, 다음의 부등식을 쉽게 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+1} = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(1-\sin x)^n \, dx &\le n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)^n \\ &\le n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(1-\sin x)^{n-1} \, dx = 1 \end{aligned}$$

양변에 $n \to \infty$인 극한을 취한 뒤 샌드위치 정리를 사용하면 구하는 극한값이 1임을 알 수 있다.