제 36회 전국 대학생 수학경시대회 (제 2 분야 풀이)

---

1. 좌표평면 위의 두 직선 $y=(1-h)x$와 $y=(1+h)x$ 사이의 각을 $\theta(h)$라 하자. (단, $\theta(h)\in[0,\frac{\pi}{2}]$.)
극한 $\lim_{h\to 0^+}\dfrac{\theta(h)}{h}$ 의 값을 구하여라.

(풀이) 주어진 조건으로부터,

$$\tan\theta(h)=\frac{(1+h)-(1-h)}{1+(1+h)\cdot(1-h)} \;=\; \frac{2h}{2-h^2}$$

를 만족한다. 위 식의 양변을 미분하면,

$$\frac{\theta'(h)}{\cos^2\theta(h)}=\frac{4+2h^2}{(2-h^2)^2}$$

이 성립하고 $\lim_{h\to 0^+}\theta(h)=0$이므로 $\lim_{h\to 0^+}\dfrac{\theta(h)}{h}=\theta'(0)=1$이다.

2. 다음 미분방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx} \;=\; x^3(x+y)^2-\dfrac{3(x+y)}{x}-1,\\[2ex] y(2)=-3\end{cases}$$

(풀이) 먼저 $x+y=u$라 치환하면, 주어진 미분방정식은

$$u'=x^3u^2-\frac{3}{x}u,\quad \text{즉, } u^{-2}u'+\frac{3}{x}u^{-1}=x^3$$

이 된다. 이는 베르누이(Bernoulli) 미분방정식이므로 $v=u^{-1}$이라 치환하면,

$$v'-\frac{3}{x}v=-x^3$$

이고 적분 계수(integrating factor)를 구하면, $\mu(x)=x^{-3}$이 된다. 따라서 주어진 미분방정식의 일반 해는 $x^{-3}v=-x+C$가 되고 $y(2)=-3$ 이므로, $u(2)=v(2)=-1$이다. 이를 이용하여 C를 구하면, $C=\frac{15}{8}$이고

$$y-x=u(x)-x=\frac{1}{x^3(\frac{15}{8}-x)}-x=\frac{8}{15x^3-8x^4}-x,\quad \left(x>\frac{15}{8}\right)$$

가 주어진 미분방정식의 해가 된다.

3. 크기가 2×2인 실행렬들로 이루어진 실벡터공간을 V라 하자. 행렬 $A\in V$가 $\mathrm{tr}(A)=3$, $\mathrm{tr}(A^2)=5$를 만족할 때, V에서 정의되는 선형사상 $T(B)=AB+BA$에 대하여 $\mathrm{tr}(T^3)$을 구하여라.

(풀이) 조건으로부터 행렬 A는 두 개의 서로 다른 고유치 $1, 2$를 갖고, 따라서 대각화 가능하다. 그러므로 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$라 두면

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

를 만족하는 가역 행렬 P가 존재한다. 한편, 기본행렬 E_{ij}에 대하여,

$$DE_{ij} + E_{ij}D = (\lambda_i + \lambda_j)E_{ij} \quad (i, j = 1, 2)$$

를 만족한다. 행렬 $E = E_{ij}$에 대하여, $X = X_{ij} = PE_{ij}P^{-1}$이라 두면,

$$\begin{aligned} T(X) &= AX + XA = APEP^{-1} + PEP^{-1}A = PDEP^{-1} + PEDP^{-1} \\ &= P(DE + ED)P^{-1} = (\lambda_i + \lambda_j)PEP^{-1} \\ &= (\lambda_i + \lambda_j)X \end{aligned}$$

이 성립한다. 그러므로 선형사상 T도 대각화 가능하고 고유치는 $\lambda_i + \lambda_j$ $(i, j = 1, 2)$이다. 즉, 고유치는 각각 $2, 3, 3, 4$가 되고 결과적으로 $\mathrm{tr}(T^3) = 2^3 + 3^3 + 3^3 + 4^3 = 126$이다.

4. 지구 북반구 위의 두 지점 A와 B의 위치는 각각 (위도 α, 경도 0)과 (위도 β, 경도 $\frac{\pi}{2}$)이다. (단, 지구는 구라고 가정하고 각도의 단위는 라디안이며, $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$이다.) 지점 A에서 지점 B까지 두 점을 지나는 지표면 위의 대원을 따라 북반구 위를 이동할 때, 가장 높은 위도를 지나는 순간의 경도를 γ라 하자. 이때, $\tan\gamma$를 α와 β에 관한 식으로 표현하여라.

(풀이) 지구의 반지름을 1로 놓으면 지표면 위의 임의의 점은 구면좌표계를 이용하면

$$(\cos\phi\cos\theta,\ \cos\phi\sin\theta,\ \sin\phi), \quad 0 \le \theta < 2\pi,\ -\pi/2 \le \phi \le \pi/2$$

로 나타낼 수 있다. 이때, 지점 A와 B의 좌표는 각각

$$A(\cos\alpha,\ 0,\ \sin\alpha), \quad B(0,\ \cos\beta\ \sin\beta)$$

로 둘 수 있다. 따라서, $A \times B = (-\sin\alpha\cos\beta,\ -\cos\alpha\sin\beta,\ \cos\alpha\cos\beta)$가 된다. 이제 두 점을 잇는 대원을 $\phi = \phi(t), \theta = \theta(t)$로 매개화하면

$$(A \times B) \cdot (\cos\phi\cos\theta,\ \cos\phi\sin\theta,\ \sin\phi) = 0$$

이 성립한다. 이를 정리하면, $\tan\alpha\cos\theta + \tan\beta\sin\theta = \tan\phi$를 만족한다. 위도가 가장 높은 점을 구하기 위해서는 양변을 t에 대하여 미분하여 $\phi'(t) = 0$이 되는 점을 찾으면 된다. 즉,

$$(-\tan\alpha\sin\gamma + \tan\beta\cos\gamma)\theta'(t) = 0$$

을 만족하는 점을 구하는 문제로 귀착된다. 한편, $\theta'(t) \neq 0$ 이므로

$$\tan\gamma = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$$

를 만족한다.

5. 정수 $1, 2, \ldots, n$을 재배열하여 얻어지는 임의의 두 순열 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$과 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$에 대하여 $n \times n$ 행렬 $A = (a_{ij})$는 $a_{ij} = (1 + \alpha_i \beta_j)^{n-1}$로 정의된다. 행렬식 $\det(A)$가 취할 수 있는 값을 모두 구하여라. ($, n \geq 2$.)

(풀이) 실수 $s_1, s_2, \ldots, s_n$에 대하여, Vandermonde 행렬을

$$V(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ s_1 & \cdots & s_n \\ & \cdots & \\ s_1^{n-1} & \cdots & s_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

이라 두면,

$$A = A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & \binom{n-1}{1}\alpha_1 & \cdots & \binom{n-1}{n-1}\alpha_1^{n-1} \\ & & \cdots & \\ 1 & \binom{n-1}{1}\alpha_n & \cdots & \binom{n-1}{n-1}\alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} V(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

이 성립함을 확인할 수 있다. 따라서

$$A(\alpha, \beta) = \binom{n-1}{1} \ldots \binom{n-1}{n-1} \det(V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \cdot \det(V(\beta_1, \ldots, \beta_n))$$

이 성립한다. Vandermonde 행렬의 행렬식 $\det(V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$은 α_i의 순서가 바뀌어도 부호만 차이나므로

$$A(\alpha, \beta) = \pm \frac{(n-1)!^n}{(0!1! \ldots (n-1)!)^2} (0!1! \ldots (n-1)!)^2 = \pm (n-1)!^n$$

이 성립한다. 따라서 $\det(A) = (n-1)!^n$이거나 $\det(A) = -(n-1)!^n$이다. 두 값 모두 가능함은 자명하다.

6. 다음 급수의 값을 구하여라.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k-1}}{n^{k+2} \cdot 2^{m(k+1)}}$$

(풀이) 우선

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^{k+2} 2^{km+m}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n2^m)^k} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n(n2^m - 1)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} < \infty \end{aligned}$$

이 성립하므로 주어진 급수는 절대수렴하고 따라서 합의 순서를 바꿀 수 있다. 그러므로 주어진 급수는

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{km+m}} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{k+2}} \right)$$

가 된다. 위 식의 마지막 급수는 절대 수렴하므로, 짝수 항과 홀수 항을 나누어

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{k+2}} &= \frac{1}{1^{k+2}}-\frac{1}{2^{k+2}}+\frac{1}{3^{k+2}}-\frac{1}{4^{k+2}}+\cdots \\ &= \left(\frac{1}{1^{k+2}}+\frac{1}{2^{k+2}}+\frac{1}{3^{k+2}}+\cdots\right)-\frac{2}{2^{k+2}}\left(\frac{1}{1^{k+2}}+\frac{1}{2^{k+2}}+\frac{1}{3^{k+2}}+\cdots\right)\end{aligned}$$

로 쓸 수 있고, 이 식은

$$\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{k+2}}$$

로 바꿀 수 있다. 한편, 두 번째 급수는 등비급수의 합을 이용하여 계산하면

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^{km+m}}=\frac{1}{2^{k+1}-1}$$

이 된다. 그러므로 구하고자 하는 급수의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{k+2}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2n}\right)^k \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)} = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots\right) = 2(1-\ln 2)\end{aligned}$$

이 된다.

7. 수열 $\{a_n\}$은 임의의 양의 정수 n에 대하여 다음과 같이 정의된다.

$$a_n=\frac{1}{\left(1+\sqrt[3]{2}\right)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{3k+2}2^k$$

극한 $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라. (단, $\binom{n}{3k+2}={}_n\mathrm{C}_{3k+2}$이고, $3k+2>n$이면 $\binom{n}{3k+2}=0$이다.)

(풀이) 먼저 $\omega=\exp(2\pi i/3)$라 정의하자. 이때, $\omega^3-1=0$이 성립하므로 다음을 확인할 수 있다:

$$1+\omega^m+\omega^{2m}=\begin{cases}3 & m\equiv 0 \pmod 3\text{인 경우,}\\ 0 & m\not\equiv 0 \pmod 3\text{인 경우.}\end{cases}$$

따라서, 다항정리로부터

$$\begin{aligned}(1+x)^n+\omega(1+\omega x)^n+\omega^2(1+\omega^2 x)^{2n} &= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{n}{m}x^m(1+\omega^{m+1}+\omega^{2m+2}) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k+2}x^{3k+2}\times 3\end{aligned}$$

를 얻는다. 이 식에 $x=2^{1/3}$를 대입하면

$$3\cdot 2^{2/3}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{3k+2}2^k=(1+2^{1/3})^n+\omega(1+2^{1/3}\omega)^n+\omega^2(1+2^{1/3}\omega^2)^n$$

을 얻는다. 따라서 수열 a_n은

$$a_n = \frac{1}{3 \cdot 2^{2/3}} \left[1 + \omega \left(\frac{1 + 2^{1/3}\omega}{1 + 2^{1/3}} \right)^n + \omega^2 \left(\frac{1 + 2^{1/3}\omega^2}{1 + 2^{1/3}} \right)^n \right] \tag{1}$$

으로 나타낼 수 있다. 그런데,

$$\left| \frac{1 + 2^{1/3}\omega}{1 + 2^{1/3}} \right| < 1 \quad \text{이고} \quad \left| \frac{1 + 2^{1/3}\omega^2}{1 + 2^{1/3}} \right| < 1$$

을 만족하므로, 관계식 (1)로부터

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{3 \cdot 2^{2/3}}$$

이 성립한다.

8. 두 번 미분가능한 함수 $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$가 다음 조건을 만족한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = 1$$

다음 부등식이 성립함을 보이고, 등호가 성립하도록 하는 함수 f를 모두 구하여라.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(x)^2}{f(x)} dx \ \geq \ 1$$

(풀이) 부등식의 좌변이 발산한다면 부등식이 성립함은 자명하므로, 부등식의 좌변이 유한함을 가정한다. 다음과 같은 부등식

$$0 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f'(x) + xf(x))^2}{f(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f'(x))^2}{f(x)} dx + 2\int_{-\infty}^{\infty} xf'(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$$

을 생각하자. 우변의 두 번째 적분을 살펴보면, 먼저

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} xf'(x)dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |xf'(x)|dx \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f'(x))^2}{f(x)} dx \right)^{1/2}$$

이므로, 적분값이 존재함을 알 수 있다. 부분적분을 사용하면,

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf'(x)dx = xf(x)\big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = xf(x)\big|_{-\infty}^{\infty} - 1$$

임을 알 수 있고, 좌변이 적분가능하므로 $\lim_{x\to\infty} xf(x)$, $\lim_{x\to-\infty} xf(x)$가 모두 존재한다. 만약 이 극한값이 0이 아니라면 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$가 존재함에 모순이므로, $\lim_{x\to\infty} xf(x) = \lim_{x\to-\infty} xf(x) = 0$임을 얻는다. 따라서,

$$0 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f'(x))^2}{f(x)} dx + 2\int_{-\infty}^{\infty} xf'(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f'(x))^2}{f(x)} dx - 2 + 1$$

이므로 주어진 부등식이 성립하게 된다.

주어진 부등식의 등호가 성립하기 위해서는 모든 x에 대하여 $f'(x) + xf(x) = 0$이어야 한다. (만약 그렇지 않을 경우, $f'(x) + xf(x)$가 연속함수이므로 모순이 생긴다.) 이를 다시 정리하면 $(\log f(x))' = -x$이므로 $f(x) = Ce^{-x^2/2}$임을 알 수 있다. 여기에 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$인 조건을 사용하여 계산하면, 부등식의 등호는 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$일 때 성립함을 알 수 있다. 이 함수가 나머지 두 조건을 만족함은 쉽게 확인할 수 있다.