제 37회 전국 대학생 수학경시대회 (제 1 분야)

2018년 11월 17일 (10:00 - 13:00)

---

1. 벡터 $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \in \mathbb{R}^3$에 대하여

$$\mathbf{v}_0 = (1,2,3), \quad \mathbf{v}_n = \mathbf{u} \times \mathbf{v}_{n-1} \quad (\text{단, } n\text{은 양의 정수})$$

로 정의할 때, 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (3,2,1) \cdot \mathbf{v}_{2n}$ 의 값을 구하여라.

2. 양의 정수 n에 대하여 $n \times n$ 실행렬 A는 $\mathrm{tr}(A) = 2018$을 만족한다. 이때, $\mathrm{rank}(A) = 1$이면 $A^2 = 2018A$ 임을 보여라.

3. 좌표평면 $\mathbb{R}^2$ 상의 영역 S 에 대하여 다음 적분이 잘 정의된다고 하자.

$$\Phi(S) = \iint_S \left(1 - 5x^2 + 4xy - 5y^2\right) dx\, dy$$

이때, $\Phi(S)$ 가 취할 수 있는 값의 최댓값을 구하여라.

4. 정수 $1, 2, \ldots, n$을 재배열하여 얻어지는 임의의 두 순열 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$과 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$에 대하여 $n \times n$ 행렬 $A = (a_{ij})$는 $a_{ij} = (1 + \alpha_i \beta_j)^{n-1}$로 정의된다. 행렬식 $\det(A)$가 취할 수 있는 값을 모두 구하여라. (단, $n \geq 2$.)

5. 크기가 2018×2018인 실대칭행렬 $A = (a_{ij})$의 각 성분 a_{ij}가 $|a_{ij} - 2018| \leq 1$을 만족한다. 행렬 A의 고유치 중 가장 큰 것을 $\lambda(A)$라 할 때, $\lambda(A)$가 취할 수 있는 값의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

6. 연속함수 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$은 열린 구간 $(0,1)$에서 미분가능하고, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$이다. 이때,

$$|f'(x_0)| \;\geq\; 2018\, f(x_0)^{2018}$$

을 만족하는 1보다 작은 양의 실수 x_0가 존재함을 보여라.

7. 크기가 3×3인 실행렬 A는 임의의 벡터 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$에 대하여 $\mathbf{v}^t A \mathbf{v} > 0$을 만족한다. (단, 행렬 A는 대칭행렬이 아닐 수도 있다.)

(1) $\det(A) > 0$임을 보여라.

(2) 대각행렬 $D = \mathrm{diag}(-1, 1, 1)$에 대하여 행렬 AD의 음수인 고유치는 정확히 한 개임을 보여라.

8. 실수열 $\{a_n\}_{n \geq 0}$은 $a_0 = 0$, $\frac{100}{101} < a_{100} < 1$을 만족하고, 임의의 $n \geq 1$에 대하여 다음이 성립한다.

$$2a_n - a_{n-1} - a_{n+1} \;\leq\; 2(1 - a_n)^3$$

(1) 수열 $b_n = a_n - \frac{n}{n+1}$은 $n \geq 100$이면 $b_n \leq b_{n+1}$을 만족함을 보여라.

(2) 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ 의 수렴, 발산을 판정하여라.

제 37회 전국 대학생 수학경시대회 (제 2 분야)

2018년 11월 17일 (10:00 - 13:00)

---

1. 좌표평면 위의 두 직선 $y=(1-h)x$와 $y=(1+h)x$ 사이의 각을 $\theta(h)$라 하자. (단, $\theta(h)\in[0,\frac{\pi}{2}]$.)

극한 $\lim_{h\to 0^+}\dfrac{\theta(h)}{h}$ 의 값을 구하여라.

2. 다음 미분방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^3(x+y)^2 - \dfrac{3(x+y)}{x} - 1, \\ \\ y(2) = -3 \end{cases}$$

3. 크기가 2×2인 실행렬들로 이루어진 실벡터공간을 V라 하자. 행렬 $A\in V$가 $\mathrm{tr}(A)=3$, $\mathrm{tr}(A^2)=5$를 만족할 때, V에서 정의되는 선형사상 $T(B)=AB+BA$에 대하여 $\mathrm{tr}(T^3)$을 구하여라.

4. 지구 북반구 위의 두 지점 A와 B의 위치는 각각 (위도 α, 경도 0)과 (위도 β, 경도 $\frac{\pi}{2}$)이다. (단, 지구는 구라고 가정하고 각도의 단위는 라디안이며, $0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$이다.) 지점 A에서 지점 B까지 두 점을 지나는 지표면 위의 대원을 따라 북반구 위를 이동할 때, 가장 높은 위도를 지나는 순간의 경도를 γ라 하자. 이때, $\tan\gamma$를 α와 β에 관한 식으로 표현하여라.

5. 정수 $1,2,\ldots,n$을 재배열하여 얻어지는 임의의 두 순열 $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$과 $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$에 대하여 $n\times n$ 행렬 $A=(a_{ij})$는 $a_{ij}=(1+\alpha_i\beta_j)^{n-1}$로 정의된다. 행렬식 $\det(A)$가 취할 수 있는 값을 모두 구하여라. (단, $n\geq 2$.)

6. 다음 급수의 값을 구하여라.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k-1}}{n^{k+2}\cdot 2^{m(k+1)}}$$

7. 수열 $\{a_n\}$은 임의의 양의 정수 n에 대하여 다음과 같이 정의된다.

$$a_n=\frac{1}{\left(1+\sqrt[3]{2}\right)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{3k+2}2^k$$

극한 $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라. (단, $\binom{n}{3k+2}={}_n\mathrm{C}_{3k+2}$이고, $3k+2>n$이면 $\binom{n}{3k+2}=0$이다.)

8. 두 번 미분가능한 함수 $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$가 다음 조건을 만족한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1,\quad \int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx=0,\quad \int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\,dx=1$$

다음 부등식이 성립함을 보이고, 등호가 성립하도록 하는 함수 f를 모두 구하여라.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f'(x)^2}{f(x)}dx\ \geq\ 1$$
