제 36회 전국 대학생 수학경시대회 (제 1 분야 풀이)

---

1. 벡터 $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \in \mathbb{R}^3$에 대하여

$$\mathbf{v}_0 = (1,2,3), \quad \mathbf{v}_n = \mathbf{u} \times \mathbf{v}_{n-1} \quad (,\ n\text{은 양의 정수})$$

로 정의할 때, 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(3,2,1)\cdot\mathbf{v}_{2n}$ 의 값을 구하여라.

(풀이) 벡터 $\mathbf{v}_0$을 $\mathbf{u}$에 나란한 성분과 수직인 성분으로 분해하면, $\mathbf{v}_0 = (2,2,2) + (-1,0,1)$이 된다. 또한 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}\times(-1,0,1) = \frac{1}{3}(1,-2,1)$이고, $|\mathbf{u}| = \frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\mathbf{u}$를 두 번 외적하는 것은 180° 회전하면서 크기를 $\frac{1}{3}$배 하는 것과 같다. 따라서,

$$\mathbf{v}_{2n-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}(1,-2,1), \quad \mathbf{v}_{2n} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n}(-1,0,1) \text{ 이고,}$$

$$(3,2,1)\cdot\mathbf{v}_{2n-1} = 0, \qquad (3,2,1)\cdot\mathbf{v}_{2n} = (-2)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} \text{ 이다.}$$

그러므로 구하고자 하는 값은

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3,2,1)\cdot\mathbf{v}_{2n} \;=\; \frac{\frac{2}{3}}{\left(1-\left(\frac{-1}{3}\right)\right)} = \frac{1}{2}$$

이다.

2. 양의 정수 n에 대하여 $n\times n$ 실행렬 A는 $\mathrm{tr}(A) = 2018$을 만족한다. 이때, $\mathrm{rank}(A) = 1$이면 $A^2 = 2018A$ 임을 보여라.

(풀이) 가정에 의하여, 벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$이 존재하여 $A = \mathbf{u}^t\mathbf{v}$로 쓸 수 있다. 그러면 $\mathbf{v}\mathbf{u}^t = \mathrm{tr}(A)$이고

$$A^2 = \mathbf{u}^t\mathbf{v}\mathbf{u}^t\mathbf{v} = (\mathbf{v}\mathbf{u}^t)\mathbf{u}^t\mathbf{v} = \mathrm{tr}(A)A = 2018A$$

를 만족한다.

3. 좌표평면 $\mathbb{R}^2$ 상의 영역 S에 대하여 다음 적분이 잘 정의된다고 하자.

$$\Phi(S) = \iint_S \left(1 - 5x^2 + 4xy - 5y^2\right)dx\,dy$$

이때, $\Phi(S)$가 취할 수 있는 값의 최댓값을 구하여라.

(풀이) 행렬 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$라 정의하면, A는 대칭행렬이고 고유치가 $3, 7$이므로

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

을 만족하는 직교행렬 P가 존재한다. 이제 $P(S') = S$를 만족하는 좌표평면 상의 영역 S'에 대하여

$$\Phi(S) = \iint_{S'} (1 - 3x^2 - 7y^2) dxdy$$

가 된다. 따라서 $S' = \{(x, y) : 3x^2 + 7y^2 \leq 1\}$일 때, 위 적분값은 최대가 되고 그 때의 적분값은

$$\Phi(S) = \frac{1}{\sqrt{21}} \iint_{X^2+Y^2 \leq 1} (1 - X^2 - Y^2) dXdY = \frac{1}{\sqrt{21}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) drd\theta = \frac{\pi}{2\sqrt{21}}$$

이 된다.

4. 정수 $1, 2, \ldots, n$을 재배열하여 얻어지는 임의의 두 순열 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$과 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$에 대하여 $n \times n$ 행렬 $A = (a_{ij})$는 $a_{ij} = (1 + \alpha_i \beta_j)^{n-1}$로 정의된다. 행렬식 $\det(A)$가 취할 수 있는 값을 모두 구하여라. $(, n \geq 2.)$

(풀이) 실수 $s_1, s_2, \ldots, s_n$에 대하여, Vandermonde 행렬을

$$V(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ s_1 & \cdots & s_n \\ & \cdots & \\ s_1^{n-1} & \cdots & s_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

이라 두면,

$$A = A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & \binom{n-1}{1} \alpha_1 & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \alpha_1^{n-1} \\ & & \cdots & \\ 1 & \binom{n-1}{1} \alpha_n & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} V(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

이 성립함을 확인할 수 있다. 따라서

$$A(\alpha, \beta) = \binom{n-1}{1} \ldots \binom{n-1}{n-1} \det(V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \cdot \det(V(\beta_1, \ldots, \beta_n))$$

이 성립한다. Vandermonde 행렬의 행렬식 $\det(V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$은 α_i의 순서가 바뀌어도 부호만 차이나므로

$$A(\alpha, \beta) = \pm \frac{(n-1)!^n}{(0!1! \ldots (n-1)!)^2} (0!1! \ldots (n-1)!)^2 = \pm (n-1)!^n$$

이 성립한다. 따라서 $\det(A) = (n-1)!^n$이거나 $\det(A) = -(n-1)!^n$이다. 두 값 모두 가능함은 자명하다.

5. 크기가 2018×2018인 실대칭행렬 $A = (a_{ij})$의 각 성분 a_{ij}가 $|a_{ij} - 2018| \leq 1$을 만족한다. 행렬 A의 고유치 중 가장 큰 것을 $\lambda(A)$라 할 때, $\lambda(A)$가 취할 수 있는 값의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(풀이) 벡터 $\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2018}}(1, 1, \ldots, 1)^t \in \mathbb{R}^{2018}$이라 하면, $\|\mathbf{x}\| = 1$이며

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \frac{1}{2018} \sum_{i,j=1}^{2018} A_{ij} \geq \frac{1}{2018} 2017 \cdot 2018^2 = 2017 \cdot 2018$$

이다. 따라서, $\lambda(A) \geq \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 2018 \cdot 2017$임을 알 수 있다.

가장 큰 고유치에 대응되는 고유벡터를 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_{2018})^t$라 하고, $|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_{2018}|$ 중 최대인 것을 $|v_i|$라 하자. 그러면,

$$|\lambda(A) v_i| = \left| \sum_{j=1}^{2018} A_{ij} v_j \right| \leq \sum_{j=1}^{2018} A_{ij} |v_j| \leq 2018 \cdot 2019 |v_i|$$

이다. 따라서, $\lambda(A) \leq 2018 \cdot 2019$임을 알 수 있다.

이제, $\lambda(A)$가 가질 수 있는 값의 범위가 $[2018 \cdot 2017, 2018 \cdot 2019]$임을 보이기 위하여, 구간 $[2017, 2019]$에 포함되어 있는 임의의 실수 a에 대하여, 가장 큰 고유치가 $2018 \cdot a$인 행렬을 만들고자 한다. 먼저, $A_{ij} = a$로 정의되는 행렬을 생각하면, $\mathrm{rank}(A) = 1$임을 쉽게 알 수 있다. 또한, 벡터 $(1, 1, \ldots, 1)^t \in \mathbb{R}^{2018}$은 A의 고유벡터이며 대응되는 고유치가 $2018 \cdot a$임을 쉽게 확인할 수 있다. 따라서, A의 가장 큰 고유치는 $2018 \cdot a$이고 $\lambda(A)$가 가질 수 있는 값의 범위는 $[2018 \cdot 2017, 2018 \cdot 2019]$임이 증명된다.

6. 연속함수 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$은 열린 구간 $(0, 1)$에서 미분가능하고, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$이다. 이때,

$$|f'(x_0)| \ \geq \ 2018 \, f(x_0)^{2018}$$

을 만족하는 1보다 작은 양의 실수 x_0가 존재함을 보여라.

(풀이) 만약, 어떤 $y \in (0, 1)$에 대하여 $f(y) = 0$를 만족하면 $x_0 = y$로 택할 수 있으므로, 이 경우의 조건을 만족하는 x_0 의 존재성은 자명하다. 따라서 그러한 실수 y가 없다고 가정하자.

이 경우, 중간값 정리에 의하여 모든 $y \in [0, 1)$에 대하여 $f(y) > 0$가 성립한다. 이제 함수 $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$를

$$g(x) = \frac{1}{f(x)^{2017}}$$

로 정의하자. 또한 M은 충분히 큰 양의 실수라 하자. 가정에 의하여 $\lim_{x \to 1} g(x) = \infty$이므로, 중간값 정리에 의하여 $g(a) = M$를 만족하는 실수 $a \in (0, 1)$을 찾을 수 있고, 이때 평균값 정리에 의하여

$$g'(x_0) = \frac{g(a) - g(0)}{a} > \frac{M - 1}{1}$$

을 만족하는 실수 $x_0 \in (0, a)$가 존재한다. 이때, $g' = -2017 \frac{f'}{f^{2018}}$이므로 위의 부등식으로 부터

$$f'(x_0) < -\frac{M - 1}{2017} f(x_0)^{2018}$$

가 성립한다. 따라서,

$$|f'(x_0)| \geq \frac{M-1}{2017} f(x_0)^{2018}$$

이 성립한다. 위 부등식에서 $M = 1 + 2017 \cdot 2018$로 두면 x_0는 문제의 조건을 만족한다.

7. 크기가 3×3인 실행렬 A는 임의의 벡터 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$에 대하여 $\mathbf{v}^t A\mathbf{v} > 0$을 만족한다. (단, 행렬 A는 대칭행렬이 아닐 수도 있다.)

(1) $\det(A) > 0$임을 보여라.

(2) 대각행렬 $D = \mathrm{diag}(-1, 1, 1)$에 대하여 행렬 AD의 음수인 고유치는 정확히 한 개임을 보여라.

(풀이) (1) 먼저 실행렬 $\mathbb{Q}$가 0 또는 음수인 고윳값이 없으면 $\det \mathbb{Q} > 0$임을 확인해 보자. 그러한 경우, 만약 $\mathbb{Q}$가 실수가 아닌 복소수 고윳값 z를 가진다고 가정하자. 이는, $\mathbb{Q}$의 특성다항식 $P(x)$에 대해 z는 $P(z) = 0$의 근이 됨을 의미한다. $P(x)$는 실계수 다항식이므로, z의 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 $P(\overline{z}) = 0$이 역시 성립하고 $\overline{z}$ 또한 $\mathbb{Q}$의 고윳값이 된다. 이때, $z\overline{z} = |z|^2 > 0$ 이고, 나머지 하나의 고윳값은 반드시 양의 실수여야 하므로 $\mathbb{Q}$의 고윳값의 곱인 $\mathbb{Q}$의 행렬식 $\det \mathbb{Q}$는 양수임을 알 수 있다.

이제 본 문제를 해결하기 위해 행렬 A가 양이 아닌 고윳값 $-\lambda$를 가진다고 가정해보자. 이때, $\boldsymbol{v}$를 $-\lambda$에 해당하는 고유벡터라고 하면

$$0 < \boldsymbol{v}^\dagger A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^\dagger(-\lambda\boldsymbol{v}) = -\lambda|\boldsymbol{v}|^2$$

이 성립한다. 이는 문제의 가정에 모순이므로, A는 양이 아닌 고윳값을 가지지 않음을 알 수 있다. 따라서, 앞서 살펴본 바와 같이, $\det A > 0$이 성립한다.

(2) 앞서 (1)의 결과에 의해 $\det(AD) = -\det A < 0$이고, 이로부터 음수인 고윳값의 개수는 1개 또는 3개임을 확인할 수 있다. 만약 음수인 고윳값이 3개라면 모순임을 보이자. 이 중 두 개를 선택하여 $-a$와 $-b$ $(a, b > 0)$라 하고, 각각에 해당하는 고유벡터를 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$와 $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ 로 나타내자.

만약 $u_1 = 0$라면 $A\boldsymbol{u} = AD\boldsymbol{u} = -a\boldsymbol{u}$ 인데, 앞서 (1)에서 A가 음수인 고윳값을 가지지 않음을 확인했으므로 모순이다. 따라서 $u_1 \neq 0$이고 마찬가지로 $w_1 \neq 0$이다.

이제, 일반성을 잃지 않고 $u_1 = w_1 = 1$라 가정하자. 그러면 임의의 $t > 0$에 대하여

$$(\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v})^\dagger D(a\boldsymbol{u} + bt\boldsymbol{v}) = -(\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v})^\dagger DAD(\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}) < 0 \tag{1}$$

이 성립한다. 이때, $u_1 = w_2 = 1$이라 가정했으므로 벡터 $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$의 첫번째 성분은 0이 되며, 이로부터

$$D(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$$

이 성립함을 알 수 있다. 따라서, (1)에 $t = -1$를 대입하면

$$(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})^\dagger(a\boldsymbol{u} - b\boldsymbol{v}) < 0 \tag{2}$$

을 얻는다. 또한, (1)에 $t = -\frac{a}{b}$를 대입하면

$$(\boldsymbol{u} - \frac{a}{b}\boldsymbol{v})^\dagger(a\boldsymbol{u} - a\boldsymbol{v}) < 0$$

을 얻는다. 마지막 식의 양변에 $\frac{b}{a}$를 곱한 뒤 (2)과 더하면 다음을 얻는다.

$$(a+b)|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|^2 < 0$$

이는 모순임이 자명하므로 증명이 끝난다.

8. 실수열 $\{a_n\}_{n\geq 0}$은 $a_0 = 0$, $\frac{100}{101} < a_{100} < 1$을 만족하고, 임의의 $n \geq 1$에 대하여 다음이 성립한다.

$$2a_n - a_{n-1} - a_{n+1} \;\leq\; 2(1-a_n)^3$$

(1) 수열 $b_n = a_n - \frac{n}{n+1}$은 $n \geq 100$이면 $b_n \leq b_{n+1}$을 만족함을 보여라.

(2) 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ 의 수렴, 발산을 판정하여라.

(풀이) (1) 실수열 $\{d_j\}_{j\geq 0}$와, $j = 1, 2, \ldots$에 대하여 다음을 정의하자:

$$\begin{aligned}\partial_j d &= d_j - d_{j-1},\\ \alpha_j d &= \partial_j d - \partial_{j+1} d = 2d_j - d_{j-1} - d_{j+1}.\end{aligned}$$

우리는 증가수열 $\{b_n = n/(n+1)\}_{n\geq 0}$과 감소함수 $g(x) = 2(1-x)^3$를 고려한다. 이 때, 임의의 $j \geq 1$에 대하여

$$\alpha_j b = \frac{2j}{j+1} - \frac{j-1}{j} - \frac{j+1}{j+2} = \frac{2}{j(j+1)(j+2)} > \frac{2}{(j+1)^3} + \frac{2}{(j+2)^5} = g(b_j) + \frac{2}{(j+2)^5}$$

가 성립한다. 부등식 $a_M > b_M$을 만족하는 최소의 $M \in [1, 100]$을 잡으면,

$$c_0, c_1, \ldots, c_{M-1} \leq 0, \quad c_M > 0$$

를 만족한다. 이제, 모든 $j \geq M$에 대하여 $c_{j+1} \geq c_j$이 성립함을 보이자. 어떤 $j \geq M$ 이 존재하여 $c_j > 0$ 이면서 $c_{j-1} \leq c_j > c_{j+1}$이성립한다고 가정하자. 그러면, $\alpha_j c > 0$이고 $\alpha_j b > g(b_j) > 0$이므로 다음을 얻는다.

$$0 < \alpha_j c = \alpha_j a - \alpha_j b \leq g(a_j) - g(b_j).$$

따라서 $a_j < b_j$이다. 이는 $c_j < 0$임을 의미하므로 모순이고, 따라서 모든 $j \geq M$에 대하여 $c_{j+1} \geq c_j$이 성립한다. 한편, $M \leq 100$이므로 (1)이 성립한다.

(2) 문제 (1)의 풀이로부터, 임의의 $j \geq M$에 대하여 다음을 얻는다.

$$a_j - b_j = c_j \geq \cdots \geq c_M > 0 \geq c_{M-1}.$$

또한 $j \geq M$이면

$$0 \leq c_j - c_{j-1} = \partial_j c = \partial_j a - \partial_j b$$

이 성립한다. 임의의 $j \geq 1$에 대하여 $\partial_j b > 0$이고 $b_j > 0$ 임을 기억하자. 임의의 $N > M$에 대하여,

$$\begin{aligned}\partial_M b < \partial_M a = \sum_{j=M}^{N-1} (\partial_j a - \partial_{j+1} a) + \partial_N a = \sum_{j=M}^{N-1} \alpha_j a + \partial_N a \leq \sum_{j=M}^{N-1} g(a_j) + \partial_N a \\ < \sum_{j=M}^{N-1} g(b_j) + \partial_N a < \sum_{j=M}^{N-1} \left(\alpha_j b - \frac{2}{(j+2)^5} \right) + \partial_N a < \partial_M b + \partial_N a - \sum_{j=M+2}^{N+1} \frac{2}{j^5}\end{aligned}$$

이 성립하므로, 양변에서 $\partial_M b$를 소거하면

$$a_N - a_{N-1} = \partial_N a > \sum_{j=M+2}^{N+1} \frac{2}{j^5}$$

이 성립한다. 이제, $s = \sum_{j=M+2}^{\infty} 2/j^5 \in (0, \infty)$으로 두면 어떤 $N_0 > M$가 존재하여,

$$\sum_{j=M+2}^{N_0+1} \frac{2}{j^5} > \frac{s}{2}$$

을 만족한다. 그러면 $N \geq N_0$인 모든 정수 N에 대하여 $a_N - a_{N-1} > s/2$가 성립한다. 결론적으로 어떤 상수 C가 존재하여, 충분히 큰 모든 N에 대하여

$$a_N > \frac{N}{2} s + C$$

가 성립한다. 따라서, 주어진 급수는 급수 $\sum_N \frac{1}{N}$과의 비교판정에 의하여, 발산함을 알 수 있다.
