제 38회 대학생 수학경시대회 (제 2 분야 풀이)

---

1. 다음 극한값을 구하여라.

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\sin\left(\sin\left(\frac{2019}{n}\right)\right)\right)$$

(풀이) 주어진 식에서 $t = \frac{2019}{n}$으로 치환하고,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

임을 이용하면 주어진 수열의 극한은

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\sin\left(\sin\left(\frac{2019}{n}\right)\right)\right) = \lim_{t\to 0^+} 2019 \cdot \frac{\sin(\sin(\sin(t)))}{\sin(\sin(t))} \cdot \frac{\sin(\sin(t))}{\sin(t)} \cdot \frac{\sin(t)}{t} = 2019$$

임을 알 수 있다.

2. 다음 미분방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(x(t)y(t) - 1), \\ y'(t) = y(t)(x(t)y(t) - 1), \\ x(0) = \frac{1}{2}, \quad y(0) = 1 \end{cases}$$

(풀이) 먼저 $u(t) = x(t)y(t)$라 하면, $u(t)$는

$$\dot{u} = 2u(u-1), \qquad u(0) = \frac{1}{2}$$

을 만족한다. 변수 u와 t를 분리하여 적분하면,

$$\int \left\{ \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} \right\} du = \int \frac{du}{u(u-1)} = \int 2dt$$

를 만족하므로, $\ln\left|\frac{u-1}{u}\right| = 2t + C$이다. 그러므로 $\frac{u-1}{u} = Ce^{2t}$가 성립하고, 따라서 $u(t) = \frac{1}{1-Ce^{2t}}$ 이다. 또한, $u(0) = \frac{1}{2}$이므로, $u(t) = \frac{1}{1+e^{2t}}$ 이다. 이를 첫번째 방정식에 대입하면, $\dot{x} = -\frac{e^{2t}}{1+e^{2t}}x$가 성립하므로

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{e^{2t}}{1+e^{2t}} dt$$

를 만족한다. 따라서 $\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln(1+e^{2t}) + C$이므로, 초기조건을 대입하여 $x(t) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}$임을 알 수 있다. 같은 방법으로, $y(t) = \sqrt{\frac{2}{1+e^{2t}}}$를 얻을 수 있다.

3. 영역 $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1,\ |z| \le 1\}$에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (\sin xy, \sin yz, 0), \qquad \mathbf{G}(x,y,z) = (e^{x^2+y^2+z^2}, \cos xz, 0)$$

에 대하여 다음 적분값을 구하여라. (단, $\mathrm{curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F}$이다.)

$$\iiint_W (\mathbf{G} \cdot \mathrm{curl}(\mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot \mathrm{curl}(\mathbf{G}))\, dV$$

(풀이) 우선, $\mathrm{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot\mathrm{curl}(\mathbf{F}) - \mathbf{F}\cdot\mathrm{curl}(\mathbf{G})$임에 주목하자. 발산(divergence) 정리를 이용하면 주어진 적분을

$$\iiint_W (\mathbf{G}\cdot\mathrm{curl}(\mathbf{F}) - \mathbf{F}\cdot\mathrm{curl}(\mathbf{G}))dV = \iint_{\partial W} ((\mathbf{F}\times\mathbf{G})\cdot\mathbf{N})dS$$

로 적을 수 있다. 여기에서, $\mathbf{N}$은 W의 접평면에서 바깥쪽으로 수직인 단위벡터이다. 계산을 통하여

$$\mathbf{F}\times\mathbf{G} = (0, 0, \sin(xy)\cos(xz) - e^{x^2+y^2+z^2}\sin(yz))$$

임을 확인할 수 있다. 한편, W는 실린더로서 옆면에서는 $\mathbf{F}\times\mathbf{G}$와 $\mathbf{N}$이 수직이므로 적분값이 0이고, 위면과 아래면에서의 적분은 함수 $\mathbf{F}\times\mathbf{G}$가 y에 대하여 기함수란 사실로부터 적분값이 0임을 알 수 있다.

(풀이2) 직접 계산을 통해

$$\mathbf{G}\cdot\mathrm{curl}(\mathbf{F}) = -ye^{-x^2-y^2-z^2}\cos(yz),$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathrm{curl}(\mathbf{G}) = x\sin(xy)\sin(xz) + 2z\sin(yz)e^{x^2+y^2+z^2}$$

를 얻고, 이 두 함수가 모두 y에 대하여 기함수라는 사실을 이용하면 적분값이 0임을 얻을 수 있다.

4. 크기가 $n\times n$인 행렬 $A = (a_{ij})$는 $a_{ij} = x^{|i-j|}$로 정의된다. (단, x는 양의 실수이다.)

(1) 행렬식 $\det(A)$의 값을 구하여라.

(2) 행렬 A가 가역이 되는 x를 모두 구하고, 그 때 A의 역행렬을 구하여라.

(풀이) (1) 먼저 $\det A_2 = 1 - x^2$임을 알 수 있다. 다음으로 $n \geq 3$에 대하여

$$\det A_n = (1-x^2)\det A_{n-1}$$

이 성립한다 (두번째 열에 x를 곱하여 첫번째 열에서 빼준다). 그러므로 $\det A_n = (1-x^2)^{n-1}$을 얻는다.

(2) 우선 (1)에 의하여 $x \neq 1$일 때 A는 가역이며, 직접 계산에 의하여

$$A_n^{-1} = \frac{1}{1-x^2}\begin{pmatrix} 1 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1+x^2 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x\cdots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & -x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 1 \end{pmatrix}$$

임을 확인할 수 있다.

5. 크기가 $n\times n$인 실행렬들로 이루어진 실벡터공간을 $M_n(\mathbb{R})$이라 하자. 행렬 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$에 대하여 선형사상 $L_{A,B} : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$을 $L_{A,B}(X) = AXB$로 정의하면 $\det(L_{A,B}) = \det(A^nB^n)$임을 보여라.

(풀이) 벡터공간 V의 순서 기저

$$\{E_{11}, E_{21}, \ldots, E_{n1}, E_{12}, E_{22}, \ldots, E_{n2}, \ldots E_{1n}, E_{2n}, \ldots, E_{nn}\}$$

에 대하여 L_{A,I_n}의 행렬표현은 n개의 대각성분이 모두 A인 블록 대각행렬이 된다. 따라서

$$\det(L_{A,I_n}) = (\det A)^n$$

이 성립한다. 유사한 방법으로

$$\det(L_{I_n,B}) = (\det B)^n$$

을 보일 수 있다. 한편 $L_{A,B} = L_{A,I_n} \circ L_{I_n,B}$ 이므로

$$\det(L_{A,B}) = \det(L_{A,I_n})\det(L_{I_n,B}) = (\det A)^n(\det B)^n = (\det AB)^n$$

이 성립한다.

6. 실수 위에서 정의된 함수 $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}(2x+1)}{(x^2+x+3)^2+3}$에 대하여, 다음 급수의 값을 구하여라.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{6} - \int_0^n f(x)dx\right)$$

(풀이) 우선 $x^2+x+3 = t$라 치환하면

$$\int_0^n f(x)dx = \int_3^{n^2+n+3} \frac{\sqrt{3}}{t^2+3}dt = \left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_3^{n^2+n+3} = \arctan\left(\frac{n^2+n+3}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{3}$$

로 정리할 수 있다. 한편, $x > 0$ 일때,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로} \quad a_n = \frac{\pi}{6} - \int_0^n f(x)dx = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{n^2+n+3}\right)$$

이다. 따라서, 주어진 급수는

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{n^2+n+3}\right)$$

으로 쓸 수 있고, 삼각함수의 덧셈정리인

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1\tan\theta_2}$$

를 이용하면,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{n^2+n+3}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{n} - \frac{\sqrt{3}}{n+1}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{n}\cdot\frac{\sqrt{3}}{n+1}}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{n}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{n+1}\right)\right\} = \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

이 성립하므로, 문제의 답은 $\frac{\pi}{3}$이다.

7. 벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^4$는 길이가 각각 $2, 3, 4, 5$이며 서로 수직이다. 임의의 2차원 부분공간 $W \subset \mathbb{R}^4$에 대하여 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$를 W에 정사영하여 얻은 벡터들 가운데 적어도 하나는 길이가 1이 아님을 보여라.

(풀이) 위 성질을 만족하는 부분공간 W가 존재한다고 하자. 부분공간 W의 정규 직교 기저를 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$이라 하자. 또한, 이를 확장하여 $\mathbb{R}^4$의 정규직교 기저를 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4$라 하자. 이제 $i = 1, 2, 3, 4$에 대하여,

$$\mathbf{v}_i = x_{1i}\mathbf{e}_1 + x_{2i}\mathbf{e}_2 + x_{3i}\mathbf{e}_3 + x_{4i}\mathbf{e}_4$$

라 하자. 위 벡터들의 계수를 이용하여 4×4 행렬 A를 $A = [x_{ij}/(j+1)]$라 정의하자. 그러면 행렬 A의 열벡터들은 각각 길이가 1이고 서로 수직이므로, A는 직교(orthogonal)행렬이다. 따라서 A^t도 역시 직교행렬이므로 A의 행벡터들도 $\mathbb{R}^4$의 정규직교(orthonormal)기저를 이룬다. 특별히,

$$\begin{aligned} 1 &= (x_{11}/2)^2 + (x_{12}/3)^2 + (x_{13}/4)^2 + (x_{14}/5)^2 \\ &= (x_{21}/2)^2 + (x_{22}/3)^2 + (x_{23}/4)^2 + (x_{24}/5)^2 \end{aligned}$$

이 성립한다. 한편, 벡터 $\mathbf{v}_i$의 W로의 정사영은 $x_{1i}\mathbf{e}_1 + x_{2i}\mathbf{e}_2$이고, $x_{1i}^2 + x_{2i}^2 = 1$이 성립한다. 따라서

$$2 = \frac{x_{11}^2 + x_{21}^2}{2^2} + \frac{x_{12}^2 + x_{22}^2}{3^2} + \frac{x_{13}^2 + x_{23}^2}{4^2} + \frac{x_{14}^2 + x_{24}^2}{5^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}$$

이 성립해야 하므로 모순이다. 따라서 그러한 부분공간 W는 존재할 수 없다.

8. 실수 a와 정수 $n\,(n \geq 2)$에 대하여 $S_n(a)$를 다음과 같이 정의하자.

$$S_n(a) = n^a \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{2019}(n-k)^{2019}}$$

수열 $\{S_n(a)\}_{n \geq 2}$가 양의 실수로 수렴하는 a의 값을 모두 구하여라.

(풀이) 먼저 구하는 답은 $a = 2019$이다. 이를 증명하기 위해 $b > 1$에 대해 $\zeta(b)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\zeta(b) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^b} < \infty\,.$$

이때, $p > 1$에 대해 x_n을 다음과 같이 정의하자.

$$x_n := n^p \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p(n-k)^p}\,.$$

그러면 다음 식을 증명하기만 하면 충분하다.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 2\zeta(p) \tag{1}$$

이를 증명한 뒤 $p = 2019$를 대입하고 보면, 원 문제에서 $a < 2019$인 경우에는 $S_n(a)$가 0으로 수렴하고, $a > 2019$인 경우에는 $S_n(a)$가 무한대로 발산함 역시 확인할 수 있기 때문이다.

이제 (1)을 증명해보자. 임의의 $\alpha \in (1/p, 1)$를 잡고 a_n, b_n, c_n을 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} a_n &= n^p \sum_{k=1}^{n^\alpha} \frac{1}{k^p(n-k)^p} \\ b_n &= n^p \sum_{k=n-n^\alpha}^{n-1} \frac{1}{k^p(n-k)^p} \\ c_n &= n^p \sum_{k=n^\alpha+1}^{n-n^\alpha-1} \frac{1}{k^p(n-k)^p}\,. \end{aligned}$$

이를 바탕으로 x_n을

$$x_n = a_n + b_n + c_n \tag{2}$$

으로 분할할 수 있다. 이제, a_n, b_n, c_n을 나누어 분석하자.

먼저 a_n을 분석하기 위해, 임의의 $k \in [1, n^\alpha]$에 대해 다음이 성립함을 관찰하자.

$$(n - n^\alpha)^p < (n - k)^p < n^p \ .$$

따라서, 다음이 성립한다.

$$\sum_{k=1}^{n^\alpha} \frac{1}{k^p} < a_n < \frac{n^p}{(n - n^\alpha)^p} \sum_{k=1}^{n^\alpha} \frac{1}{k^p} \ .$$

여기에 샌드위치 정리를 적용하면 다음을 확인할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \zeta(p) \ . \tag{3}$$

같은 방법으로 다음 역시 확인할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \zeta(p) \ . \tag{4}$$

마지막으로 c_n을 분석해보자. 이 경우 충분히 큰 모든 n과 임의의 $k \in (n^\alpha, n - n^\alpha)$에 대해 다음 식이 성립함은 쉽게 알 수 있다.

$$k^p(n - k)^p > (n^\alpha)^p(n - n^\alpha)^p > \frac{1}{2} n^{p(\alpha+1)}$$

이로부터 다음과 같은 부등식을 얻는다.

$$c_n \le n^p(n - 2n^\alpha) \times \frac{2}{n^{p(\alpha+1)}} < \frac{2}{n^{\alpha p - 1}} \ .$$

이제 $\alpha \in (1/p, 1)$이란 가정으로부터 $\alpha p - 1 > 0$임을 알고 있으므로, 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0 \ . \tag{5}$$

최종적으로 (3), (4), (5)를 (2)에 반영하면 (1)을 얻어 증명이 끝난다.