제 38회 대학생 수학경시대회 (제 1 분야)

2019년 11월 9일 (10:00 – 13:00)

---

1. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2019 & 2020 & 2021 \\ 2020 & 2021 & 2022 \\ 2021 & 2022 & 2023 \end{pmatrix}$에 대하여 $\mathrm{rank}(A)$를 구하여라.

2. 행렬 A와 B가 다음과 같이 주어져 있다.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

이 때, 입체 $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} \le 1 < \mathbf{x} \cdot B\mathbf{x}\}$ 의 부피를 구하여라.

3. 영역 $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1,\ |z| \le 1\}$에서 두 벡터장 $\mathbf{F}$와 $\mathbf{G}$가 다음과 같이 주어져 있다.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin xy,\, \sin yz,\, 0), \quad \mathbf{G}(x, y, z) = (e^{x^2+y^2+z^2},\, \cos xz,\, 0)$$

다음 적분값을 구하여라. (단, $\mathrm{curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F}$이다.)

$$\iiint_W (\mathbf{G} \cdot \mathrm{curl}(\mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot \mathrm{curl}(\mathbf{G}))\, dV$$

4. 크기가 $n \times n$ 인 유니타리(unitary) 행렬 A와 B에 대하여, $|\det(A + 2B)| \le 3^n$ 임을 보여라.

5. 수열 $\{a_n\}_{n\ge1}$ 은 다음과 같이 정의된다. (단, log는 자연로그이다.)

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \log \frac{e^{a_n} - 1}{a_n}$$

수열 $\{b_n\}_{n\ge1}$ 은 $b_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$ 으로 정의할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 값을 구하여라.

6. 적분 가능한 함수 $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$가 다음을 만족한다.

$$\int_0^\infty f(x)^2 dx < \infty, \quad \int_0^\infty x f(x) dx < \infty$$

다음 부등식을 증명하여라.

$$\left(\int_0^\infty f(x)dx\right)^3 \le 8 \left(\int_0^\infty f(x)^2 dx\right) \left(\int_0^\infty x f(x) dx\right)$$

7. 실수 a와 정수 $n\,(n \ge 2)$에 대하여 $S_n(a)$를 다음과 같이 정의하자.

$$S_n(a) = n^a \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{2019}(n-k)^{2019}}$$

수열 $\{S_n(a)\}_{n\ge2}$ 가 양의 실수로 수렴하는 a의 값을 모두 구하여라.

8. 크기가 $n \times n$ 인 복소행렬들로 이루어진 복소벡터공간을 $M_n(\mathbb{C})$라고 하자. 선형사상 $T : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$는 임의의 $A \in M_n(\mathbb{C})$에 대하여 $\det(A) = \det(T(A))$를 만족한다.

(1) 행렬 $T(A)$가 영행렬이면, A가 영행렬임을 보여라.

(2) 임의의 $A \in M_n(\mathbb{C})$에 대하여 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(T(A))$임을 보여라.

제 38회 대학생 수학경시대회 (제 2 분야)

2019년 11월 9일 (10:00 – 13:00)

---

1. 다음 극한값을 구하여라.

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\sin\left(\sin\left(\frac{2019}{n}\right)\right)\right)$$

2. 다음 미분방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(x(t)y(t) - 1), \\ y'(t) = y(t)(x(t)y(t) - 1), \\ x(0) = \frac{1}{2}, \quad y(0) = 1 \end{cases}$$

3. 영역 $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1,\ |z| \le 1\}$에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin xy, \sin yz, 0), \qquad \mathbf{G}(x, y, z) = (e^{x^2+y^2+z^2}, \cos xz, 0)$$

에 대하여 다음 적분값을 구하여라. (단, $\mathrm{curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F}$이다.)

$$\iiint_W (\mathbf{G} \cdot \mathrm{curl}(\mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot \mathrm{curl}(\mathbf{G}))\, dV$$

4. 크기가 $n \times n$인 행렬 $A = (a_{ij})$는 $a_{ij} = x^{|i-j|}$로 정의된다. (단, x는 양의 실수이다.)

(1) 행렬식 $\det(A)$의 값을 구하여라.

(2) 행렬 A가 가역이 되는 x를 모두 구하고, 그 때 A의 역행렬을 구하여라.

5. 크기가 $n \times n$인 실행렬들로 이루어진 실벡터공간을 $M_n(\mathbb{R})$이라 하자. 행렬 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$에 대하여 선형사상 $L_{A,B} : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$을 $L_{A,B}(X) = AXB$로 정의하면 $\det(L_{A,B}) = \det(A^n B^n)$임을 보여라.

6. 실수 위에서 정의된 함수 $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}(2x+1)}{(x^2+x+3)^2+3}$에 대하여, 다음 급수의 값을 구하여라.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{6} - \int_0^n f(x)dx\right)$$

7. 벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^4$는 길이가 각각 $2, 3, 4, 5$이며 서로 수직이다. 임의의 2차원 부분공간 $W \subset \mathbb{R}^4$에 대하여 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$를 W에 정사영하여 얻은 벡터들 가운데 적어도 하나는 길이가 1이 아님을 보여라.

8. 실수 a와 정수 $n\,(n \ge 2)$에 대하여 $S_n(a)$를 다음과 같이 정의하자.

$$S_n(a) = n^a \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{2019}(n-k)^{2019}}$$

수열 $\{S_n(a)\}_{n\ge 2}$가 양의 실수로 수렴하는 a의 값을 모두 구하여라.
