제 38회 대학생 수학경시대회 (제 1 분야 풀이)

---

1. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2019 & 2020 & 2021 \\ 2020 & 2021 & 2022 \\ 2021 & 2022 & 2023 \end{pmatrix}$에 대하여 $\mathrm{rank}(A)$를 구하여라.

(풀이) 우선

$$A = \begin{pmatrix} 2019 & 2019 & 2019 \\ 2020 & 2020 & 2020 \\ 2021 & 2021 & 2021 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

이고, 두 행렬의 계수(rank)는 모두 1이다. 따라서 행렬 A의 계수는 기껏해야 2이다. 한편, 행렬 A의 2×2 부분행렬의 행렬식은 $2019 \times 2021 - 2020^2 \neq 0$이므로, A의 계수는 적어도 2이상이다. 그러므로 $\mathrm{rank}(A) = 2$ 이다.

2. 행렬 A와 B가 다음과 같이 주어져 있다.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

이 때, 입체 $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} \leq 1 < \mathbf{x} \cdot B\mathbf{x}\}$ 의 부피를 구하여라.

(풀이) 먼저, 구하는 답은 $\frac{1}{3}\pi$이다. 이를 증명하기 위해 직교행렬(Orthogonal matrix) U를

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

로 정의하자. 이때, A와 B는 U를 이용하여 다음과 같이 동시에 대각화가 가능하다.

$$A = U \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} U^{-1} \quad \text{그리고} \quad B = U \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} U^{-1} .$$

즉, 이 대각화에 맞추어 기저를 변환함에 따라 입체 V는 다음과 같이 이해할 수 있다.

$$V = \left\{ \mathbf{x} = (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 3y^2 + 3z^2 < 1 \,,\ \ 2x^2 + 6y^2 + 12z^2 \geq 1 \right\} .$$

따라서 V의 부피는 $x^2 + 3y^2 + 3z^2 < 1$에 해당하는 입체의 부피에서 $2x^2 + 6y^2 + 12z^2 < 1$에 해당하는 입체의 부피를 뺀 것으로 구할수 있다. 따라서 $\frac{4}{3}\pi \cdot \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{3}\pi$이다.

3. 영역 $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ |z| \leq 1\}$에서 두 벡터장 $\mathbf{F}$와 $\mathbf{G}$가 다음과 같이 주어져 있다.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin xy,\, \sin yz,\, 0), \quad \mathbf{G}(x, y, z) = (e^{x^2+y^2+z^2},\, \cos xz,\, 0)$$

다음 적분값을 구하여라. (단, $\mathrm{curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F}$이다.)

$$\iiint_W (\mathbf{G} \cdot \mathrm{curl}(\mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot \mathrm{curl}(\mathbf{G}))\, dV$$

(풀이1) 우선, $\mathrm{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \mathrm{curl}(\mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot \mathrm{curl}(\mathbf{G})$임에 주목하자. 발산(divergence) 정리를 이용하면 주어진 적분을

$$\iiint_W (\mathbf{G} \cdot \mathrm{curl}(\mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot \mathrm{curl}(\mathbf{G}))dV = \iint_{\partial W} ((\mathbf{F} \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{N})dS$$

로 적을 수 있다. 여기에서, $\mathbf{N}$은 W의 접평면에서 바깥쪽으로 수직인 단위벡터이다. 계산을 통하여

$$\mathbf{F} \times \mathbf{G} = (0, 0, \sin(xy)\cos(xz) - e^{x^2+y^2+z^2}\sin(yz))$$

임을 확인할 수 있다. 한편, W는 실린더로서 옆면에서는 $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$와 $\mathbf{N}$이 수직이므로 적분값이 0이고, 위면과 아래면에서의 적분은 함수 $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$가 y에 대하여 기함수란 사실로부터 적분값이 0임을 알 수 있다.

(풀이2) 직접 계산을 통해

$$\mathbf{G} \cdot \mathrm{curl}(\mathbf{F}) = -ye^{-x^2-y^2-z^2}\cos(yz),$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathrm{curl}(\mathbf{G}) = x\sin(xy)\sin(xz) + 2z\sin(yz)e^{x^2+y^2+z^2}$$

를 얻고, 이 두 함수가 모두 y에 대하여 기함수라는 사실을 이용하면 적분값이 0임을 얻을 수 있다.

4. 크기가 $n \times n$인 유니타리(unitary) 행렬 A와 B에 대하여, $|\det(A + 2B)| \le 3^n$ 임을 보여라.

(풀이1) 행렬 A와 B에 대하여, $A^* = \overline{A^t}$와 $B^* = \overline{B^t}$라 정의하자. 가정에 의하여, 두 행렬이 유니타리 행렬이므로

$$AA^* = A^*A = BB^* = B^*B = I_n$$

이 된다. 또한, $(A^*)^* = A$임을 이용하면, $(A^*B)(A^*B)^* = (A^*B)(B^*(A^*)^*) = A^*(BB^*)A = I_n$이므로 A^*B도 유니타리 행렬이 된다.

스펙트럴 정리(Spectral theorem)에 의하여 임의의 유니타리 행렬 U가 주어지면 QUQ^{-1}가 대각행렬이 되는 가역행렬 Q가 존재한다. 또한, $QUQ^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$이라 쓰면, $|\lambda_i| = 1$을 만족한다. 따라서,

$$\det U = \det(QUQ^{-1}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \Longrightarrow |\det U| = 1$$

이 성립한다. 이를 $U = A$에 적용하면, $|\det(A)| = 1$을 얻는다.

또한, $U = A^*B$라 하면, $Q(A^*B)Q^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$가 되는 가역행렬 Q가 존재한다. 따라서,

$$Q(I + 2A^*B)Q^{-1} = I + 2(QA^*BQ^{-1}) = \mathrm{diag}(1 + 2\lambda_1, \ldots, 1 + 2\lambda_n)$$

을 얻는다. 이를 이용하면

$$\det(Q(I + 2A^*B)A^{-1}) = \det(I + 2A^*B) = \prod_{i=1}^{n}(1 + 2\lambda_i)$$

를 얻을 수 있다. 이제 $|1 + 2\lambda_i| \le 1 + 2|\lambda_i| = 3$이므로 $|\det(I + 2A^*B^*)| \le 3^n$을 얻는다. 따라서

$$|\det(A + 2B)| = |\det(A(I + 2A * B))| = |\det(A)||\det(I + 2A^*B)| \le 3^n$$

이 성립한다.

(풀이2) 만일 A가 유니타리 행렬이면, 임의의 벡터 v에 대하여 $||Av|| = ||v||$가 성립한다. 따라서, $A+2B$의 경우, 임의의 벡터 v에 대하여 삼각부등식을 적용하면

$$||(A+2B)v|| = ||(Av)+2(Bv)|| \le ||Av|| + 2||Bv|| = 3||v||$$

를 얻는다. 즉, 행렬 $A+2B$의 임의의 고유값 λ_i는 그 크기가 3보다 작거나 같다. 따라서, $A+2B$의 고유값을 각각 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$이라 하면

$$|\det(A+2B)| = \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| \le \prod_{i=1}^{n} 3 = 3^n$$

을 얻는다.

5. 수열 $\{a_n\}_{n\ge1}$은 다음과 같이 정의된다. (단, log는 자연로그이다.)

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \log \frac{e^{a_n}-1}{a_n}$$

수열 $\{b_n\}_{n\ge1}$은 $b_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$으로 정의할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값을 구하여라.

(풀이) 실수 $x>0$일 때, 평균값 정리에 의해 $\frac{e^x-1}{x} = e^y$인 실수 y $(0<y<x)$가 존재한다. 따라서, a_n은 단조감소 수열이고 0이상인 실수로 수렴한다. 이제 $\lim_{n\to\infty} a_n = p$라 놓자. $a_n e^{a_{n+1}} = e^{a_n} - 1$이므로, p는 $pe^p = e^p - 1$을 만족한다. 함수 $f(x) = e^x - 1 - xe^x$라 정의하면, $f(0)=0$이고 $f'(x) = -xe^x < 0$ $(x>0)$이므로 $p=0$이다. 또한, $a_n e^{a_{n+1}} = e^{a_n} - 1$이므로,

$$e^{a_1} - 1 = a_1 e^{a_2} = a_1 + a_1(e^{a_2}-1) = a_1 + a_1(a_2 e^{a_3}) = a_1 + a_1a_2 + a_1a_2(e^{a_3}-1)$$

$$= a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3(e^{a_4}-1) = \cdots = \sum_{i=1}^{n-1} b_i + b_n e^{a_{n+1}}$$

이 성립한다. 한편, $0 < a_n \le a_1 = 1$이므로 $0 < b_n = a_1 \cdots a_n \le 1$이 성립한다. 따라서, $\lim_{n\to\infty} b_n e^{a_{n+1}} = 0$이다. 그러므로, $e^{a_1} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 성립하고 따라서, 주어진 급수의 값은 $e-1$이다.

6. 적분 가능한 함수 $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$가 다음을 만족한다.

$$\int_0^\infty f(x)^2 dx < \infty, \qquad \int_0^\infty x f(x) dx < \infty$$

다음 부등식을 증명하여라.

$$\left(\int_0^\infty f(x)dx\right)^3 \le 8\left(\int_0^\infty f(x)^2 dx\right)\left(\int_0^\infty x f(x)dx\right)$$

(풀이) 임의의 실수 $R>0$에 대하여, 코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)dx &= \int_0^R f(x)dx + \int_R^\infty f(x)dx \\ &\le \left(\int_0^R dx\right)^{1/2}\left(\int_0^R f(x)^2 dx\right)^{1/2} + \frac{1}{R}\int_R^\infty x f(x)dx \\ &\le R^{1/2}\left(\int_0^\infty f(x)^2 dx\right)^{1/2} + \frac{1}{R}\int_0^\infty x f(x)dx\end{aligned}$$

를 얻는다. 이제 $R^{1/2}\left(\int_0^\infty f(x)^2dx\right)^{1/2} = \frac{1}{R}\int_0^\infty xf(x)dx$를 만족하는 실수 R을 선택하면,

$$\int_0^\infty f(x)dx \le 2\left(\int_0^\infty f(x)^2dx\right)^{1/3}\left(\int_0^\infty xf(x)dx\right)^{1/3}$$

이 성립한다.

7. 실수 a와 정수 $n\,(n \ge 2)$에 대하여 $S_n(a)$를 다음과 같이 정의하자.

$$S_n(a) = n^a \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{2019}(n-k)^{2019}}$$

수열 $\{S_n(a)\}_{n\ge 2}$가 양의 실수로 수렴하는 a의 값을 모두 구하여라.

(풀이) 먼저 구하는 답은 $a = 2019$이다. 이를 증명하기 위해 $b > 1$에 대해 $\zeta(b)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\zeta(b) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^b} < \infty\ .$$

이때, $p > 1$에 대해 x_n을 다음과 같이 정의하자.

$$x_n := n^p \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p(n-k)^p}\ .$$

그러면 다음 식을 증명하기만 하면 충분하다.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2\zeta(p) \tag{1}$$

이를 증명한 후, $p = 2019$를 대입하고 보면, 원 문제에서 $a < 2019$인 경우에는 $S_n(a)$가 0으로 수렴하고, $a > 2019$인 경우에는 $S_n(a)$가 무한대로 발산함 역시 확인할 수 있기 때문이다.

이제 (1)을 증명해보자. 임의의 $\alpha \in (1/p,\, 1)$를 잡고 a_n, b_n, c_n을 다음과 같이 정의하자.

$$a_n = n^p \sum_{k=1}^{n^\alpha} \frac{1}{k^p(n-k)^p}$$
$$b_n = n^p \sum_{k=n-n^\alpha}^{n-1} \frac{1}{k^p(n-k)^p}$$
$$c_n = n^p \sum_{k=n^\alpha+1}^{n-n^\alpha-1} \frac{1}{k^p(n-k)^p}\ .$$

이를 바탕으로 x_n을

$$x_n = a_n + b_n + c_n \tag{2}$$

으로 분할할 수 있다. 이제, a_n, b_n, c_n을 나누어 분석하자.

먼저 a_n을 분석하기 위해, 임의의 $k \in [1,\, n^\alpha]$에 대해 다음이 성립함을 관찰하자.

$$(n-n^\alpha)^p < (n-k)^p < n^p\ .$$

따라서, 다음이 성립한다.

$$\sum_{k=1}^{n^\alpha} \frac{1}{k^p} < a_n < \frac{n^p}{(n-n^\alpha)^p} \sum_{k=1}^{n^\alpha} \frac{1}{k^p}\ .$$

여기에 샌드위치 정리를 적용하면 다음을 확인할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \zeta(p)\ . \tag{3}$$

같은 방법으로 다음 역시 확인할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \zeta(p)\ . \tag{4}$$

마지막으로 c_n을 분석해보자. 이 경우 충분히 큰 모든 n과 임의의 $k \in (n^\alpha,\, n-n^\alpha)$에 대해 다음 식이 성립함은 쉽게 알 수 있다.

$$k^p(n-k)^p > (n^\alpha)^p(n-n^\alpha)^p > \frac{1}{2}n^{p(\alpha+1)}$$

이로부터 다음과 같은 부등식을 얻는다.

$$c_n \le n^p(n-2n^\alpha) \times \frac{2}{n^{p(\alpha+1)}} < \frac{2}{n^{\alpha p-1}}\ .$$

이제 $\alpha \in (1/p,\, 1)$이란 가정으로부터 $\alpha p - 1 > 0$임을 알고 있으므로, 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0\ . \tag{5}$$

최종적으로 (3), (4), (5)를 (2)에 반영하면 (1)을 얻어 증명이 끝난다.

8. 크기가 $n \times n$ 인 복소행렬들로 이루어진 복소벡터공간을 $M_n(\mathbb{C})$라고 하자. 선형사상 $T : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$는 임의의 $A \in M_n(\mathbb{C})$에 대하여 $\det(A) = \det(T(A))$를 만족한다.

(1) 행렬 $T(A)$가 영행렬이면, A가 영행렬임을 보여라.

(2) 임의의 $A \in M_n(\mathbb{C})$에 대하여 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(T(A))$임을 보여라.

(풀이) (1) 행렬 $A \in V$에 대하여 $\phi(A) = O$이라 하자. 그러면 임의의 행렬 $X \in V$에 대하여

$$\det(A+X) = \det(\phi(A+X)) = \det(\phi(A)+\phi(X)) = \det(\phi(X)) = \det(X)$$

를 만족한다. 행렬 $A \neq O$이라 하자. 일반성을 잃지 않고 첫번째 열 벡터인 $A_1 \neq 0$이라 하자. 열 벡터 A_1을 포함하는 $\mathbb{R}^n$의 기저를 $A_1, B_2, \ldots, B_n$이라 하면 $\det(A_1, B_2, \ldots, B_n) \neq 0$이다. 이제 $n \times n$ 행렬 X를 $X = (0, B_2 - A_2, \ldots, B_n - A_n)$이라 두면

$$\det(A+X) = \det(A_1, B_2, \ldots, B_n) \neq 0, \qquad \det(X) = \det(0, B_2 - A_2, \ldots, B_n - A_n) = 0$$

이므로 모순이다. 따라서 $A = O$이다.

(2) 우선, $\mathrm{rank}(A) = s$, $\mathrm{rank}(\phi(A)) = t$라 두자. 그리고

$$A_1 = U_1 A V_1 = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = U_2\phi(A)V_2 = \begin{pmatrix} I_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

를 만족하는 가역인 행렬 U_i, V_j를 잡자. 또한 $B = U_1^{-1}V_1^{-1}$이라 두자. 그러면 임의의 복소수 $x \in \mathbb{C}$에 대하여

$$\det(U_1V_1)^{-1}\det(I_n + xA_1) = \det(B + xA) = \det(\phi(B) + x\det(\phi(A)) = \det(U_2V_2)^{-1}\det(U_2\phi(B)V_2 + xA_2)$$

를 만족하므로, x를 변수로 보고 x에 대한 차수를 비교하면 $s \le t$가 성립함을 확인할 수 있다. 마찬가지로 ϕ^{-1}에 대하여 위 방법을 적용하면 $t \le s$를 얻을 수 있고, 따라서 $s = t$가 성립한다.