제 39회 대학생 수학 경시대회 (제 1 분야)

2020년 11월 14일 (10:00 – 11:30)

---

1. 다음 극한값을 구하여라.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin(x^2) - x^2}{x^3}$$

2. 양의 정수 n은 완전제곱수이고, 마지막 네 자리의 숫자가 모두 같다. 이때, n은 10000의 배수임을 보여라.

3. 크기가 $n \times n$이고 영행렬이 아닌 실대칭행렬 Z는 $\mathrm{tr}(Z) \leq 0$을 만족한다. 이때, 충분히 큰 모든 양의 정수 k에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라. (단, I_n은 크기가 $n \times n$인 단위 행렬이다.)

$$\det\left(I_n + \frac{1}{k}Z\right) < 1$$

4. 다음 극한값을 구하여라.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 + \cos^2 nx} dx$$

제 39회 대학생 수학 경시대회 (제 1 분야)

2020년 11월 14일 (12:00 – 13:30)

---

5. 크기가 2020×2020인 행렬 A는 계수(rank)가 2이고, 모든 성분이 0 또는 1이다. 행렬 A의 성분을 모두 더한 값을 $n(A)$라 정의할 때, 가능한 $n(A)$의 값을 모두 구하여라.

6. 영역

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| \leq \frac{2}{3}, \quad 0 \leq x, y \leq 1 \right\}$$

에 대하여 다음 적분값을 구하여라.

$$\iint_{\mathcal{D}} (1 + (x - y)^3) \, dA$$

7. 두 번 미분가능한 함수 $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$가 주어져 있다. 이계도함수 $g''(x)$가 모든 점에서 연속이고 $g'(0) = g'(1) = 0$을 만족하면, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\int_0^1 \frac{g'(x)^4}{g(x)^2} dx \leq 9 \int_0^1 g''(x)^2 dx$$

8. 양의 실수열 $\{a_{m,n}\}_{m \geq 0, n \geq 1}$이 모든 양의 정수 m, n에 대하여 다음 조건을 만족한다.

$$a_{m+1,n} \times a_{m-1,n+1} = a_{m,n} \times a_{m,n+1} - 1, \quad a_{0,n} = 1$$

양의 정수 m에 대하여 행렬 $B_m = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$을 다음과 같이 정의하자.

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{1,i} & i = j, \\ 1 & |i - j| = 1, \\ 0 & \text{그 밖의 모든 경우} \end{cases}$$

이때, 모든 양의 정수 m에 대하여 $a_{m,1} = \det(B_m)$이 성립함을 보여라.
