제 39회 대학생 수학 경시대회 (제 1 분야 풀이)

---

1. 다음 극한값을 구하여라.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin(x^2) - x^2}{x^3}$$

(풀이) 지수함수 e^x와 삼각함수 $\sin(x^2)$에 대한 원점에서의 테일러(Taylor) 급수를 구하면

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad \sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

이다. 그러므로, 함수 $e^x \sin(x^2)$의 테일러 급수는 다음과 같다.

$$e^x \sin(x^2) = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + \cdots$$

따라서, 극한값을 구하면

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin(x^2) - x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + \frac{x^4}{2} + \cdots}{x^3} = 1.$$

(별해) 로피탈의 정리에 의해 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - x^2}{x^3} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t - t}{t^{3/2}} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}} = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin t}{\frac{3}{4}t^{-1/2}} = 0.$$

그러므로 주어진 극한은

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin(x^2) - x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin(x^2) - \sin(x^2)}{x^3} + \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - x^2}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1.$$

2. 양의 정수 n은 완전제곱수이고, 마지막 네 자리의 숫자가 모두 같다. 이때, n은 10000의 배수임을 보여라.

(풀이) 마지막 네 자리의 숫자를 a라 하자. 주어진 조건에 의하면, 양의 정수 m이 존재하여

$$n = m^2 \equiv 1000a + 100a + 10a + a = 1111 \cdot a \pmod{10000}$$

이 성립한다. 그러므로

$$-9n = -(3m)^2 \equiv (1 - 10000)a \equiv a \pmod{10000}$$

이 된다. 따라서 $a \equiv -(3m)^2 \pmod{16}$이므로 가능한 a의 값은 $(0 \le a \le 9$로부터) $0, 7$밖에 없다. 또한, $a \equiv -(3m)^2 \pmod{5}$로부터 가능한 a의 값은 $0, 1, 4, 6, 9$뿐이다. 결론적으로 가능한 a의 값은 0밖에 없다. 정수 $n = 10000$인 경우, 완전제곱수이므로 $a = 0$이고 n은 10000의 배수이다.

3. 크기가 $n \times n$이고 영행렬이 아닌 실대칭행렬 Z는 $\mathrm{tr}(Z) \le 0$을 만족한다. 이때, 충분히 큰 모든 양의 정수 k에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라. (단, I_n은 크기가 $n \times n$인 단위 행렬이다.)

$$\det\left(I_n + \frac{1}{k}Z\right) < 1$$

(풀이) 행렬식의 정의로부터

$$\det\left(I_n+\frac{1}{k}Z\right)=1+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}z_{ii}+\frac{1}{k^2}\sum_{i<j}(z_{ii}z_{jj}-z_{ij}^2)+O\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

이 성립함을 알 수 있다. 위에서 $f(k)=O(\frac{1}{k^3})$이라 함은 충분히 큰 모든 k에 대하여 $f(k)\le\frac{M}{k^3}$을 만족하는 양수 M이 존재함을 의미한다. 가정으로부터

$$\mathrm{tr}(Z)=\sum_{i=1}^{n}z_{ii}\le 0$$

이다. 만약 $\mathrm{tr}(Z)<0$이면 충분히 큰 모든 정수 k에 대하여 $\det\left(I_n+\frac{1}{k}Z\right)<1$이 성립함을 알 수 있다. 이제 $\mathrm{tr}(Z)=\sum_{i=1}^{n}z_{ii}=0$이라 가정하자. 그러면

$$2\sum_{i<j}(z_{ii}z_{jj}-z_{ij}^2)=\left(\sum_{i=1}^{n}z_{ii}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}z_{ii}^2-2\sum_{i<j}z_{ij}^2=-\sum_{i,j=1}^{n}z_{ij}^2<0$$

이므로, 이 경우에도 역시 충분히 큰 모든 정수 k에 대하여 $\det\left(I_n+\frac{1}{k}Z\right)<1$이 성립한다.

4. 다음 극한값을 구하여라.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 nx}dx$$

(풀이) 구간 $[0,\,\frac{\pi}{2}]$를 작은 n개의 구간 $[0,\,\frac{\pi}{2n}]$, $[\frac{\pi}{2n},\,\frac{2\pi}{2n}]$, $\cdots$, $[\frac{(k-1)\pi}{2n},\,\frac{k\pi}{2n}]$, $\cdots$, $[\frac{(n-1)\pi}{2n},\,\frac{n\pi}{2n}]$으로 나누자. 주어진 적분값은

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 nx}dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{\pi(k-1)}{2n}}^{\frac{\pi k}{2n}}\cos^2 x\cdot\frac{1}{1+\cos^2 nx}dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{\pi k}{2n}\int_{\frac{\pi(k-1)}{2n}}^{\frac{\pi k}{2n}}\frac{1}{1+\cos^2 nx}dx+\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{\pi(k-1)}{2n}}^{\frac{\pi k}{2n}}\left(\cos^2 x-\cos^2\frac{\pi k}{2n}\right)\frac{1}{1+\cos^2 nx}dx$$

로 나누어 쓸 수 있다. 부등식 $\frac{\pi(k-1)}{2n}\le x\le\frac{\pi k}{2n}$를 만족하는 모든 실수 x에 대하여

$$0\le\left(\cos^2 x-\cos^2\frac{\pi k}{2n}\right)\frac{1}{1+\cos^2 nx}\le\cos^2\frac{\pi(k-1)}{2n}-\cos^2\frac{\pi k}{2n}$$

를 만족하므로 두 번째 항은

$$0\le\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{\pi(k-1)}{2n}}^{\frac{\pi k}{2n}}\left(\cos^2 x-\cos^2\frac{\pi k}{2n}\right)\frac{1}{1+\cos^2 nx}dx\le\sum_{k=1}^{n}\left(\cos^2\frac{\pi(k-1)}{2n}-\cos^2\frac{\pi k}{2n}\right)\cdot\frac{\pi}{2n}=\frac{\pi}{2n}$$

이 성립한다. 그러므로 극한값은 0이다.

첫 번째 항을 자세히 계산하면

$$\sum_{k=1}^{n}\cos^2\left(\frac{\pi k}{2n}\right)\int_{\frac{\pi(k-1)}{2n}}^{\frac{\pi k}{2n}}\frac{1}{1+\cos^2 nx}dx=\sum_{k=1}^{n}\cos^2\left(\frac{\pi k}{2n}\right)\cdot\frac{1}{n}\cdot\int_{\frac{\pi(k-1)}{2n}}^{\frac{\pi k}{2n}}\frac{n}{1+\cos^2 nx}dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\cos^2\left(\frac{\pi k}{2n}\right)\cdot\frac{1}{n}\cdot\int_{\frac{\pi(k-1)}{2}}^{\frac{\pi k}{2}}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\cos^2\left(\frac{\pi k}{2n}\right)\cdot\frac{1}{n}\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$$

가 성립한다. 위 식에서 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\left(\frac{\pi k}{2n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$이므로,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 nx}dx=\int_0^1\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$$

가 성립한다. 한편,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{\sec^2 x+1}dx$$

이 되고, $u=\tan x$라 치환하면 $du=\sec^2 xdx$이고 위 적분은

$$\int_0^{\infty}\frac{du}{u^2+2}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

가 된다. 또한,

$$\int_0^1\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{2}\cos\pi x+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{1}{2}$$

이므로, 극한값은 $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$이다.

5. 크기가 2020×2020인 행렬 A는 계수(rank)가 2이고, 모든 성분이 0 또는 1이다. 행렬 A의 성분을 모두 더한 값을 $n(A)$라 정의할 때, 가능한 $n(A)$의 값을 모두 구하여라.

(풀이) 분명히, 부등식 $2\le n(A)\le 2020^2-1$이 성립한다. 이제 이 부등식을 만족하는 모든 값이 가능함을 보이자. 다음 행렬은

$$\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\&&\cdots&&\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$$

계수가 2이고 $n(A)=2$이다. 이 행렬과 마찬가지로, 세 번째 이후 행은 모두 0이고, 처음 두 행의 원소은 모두 0이거나 모두 1만 아니면 계수는 항상 2이다. 이러한 행렬 가운데 1이 가장 많은 행렬은

$$B_0=\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&1&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\\&&\cdots&&\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$$

이며 $n(B_0)=2\cdot 2020-1$이다. 행렬 B_0 에서 첫 번째 열의 세 번째 행 이후 어느 행에 1이 있어도 계수는 항상 2이다. 이 과정에서 1이 가장 많은 행렬은

$$C_0=\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&1&\cdots&1\\1&0&0&\cdots&0\\&&\cdots&&\\1&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$$

이며 $n(C_0) = 3 \cdot 2020 - 3$이다. 아래 행렬 B_1은 계수가 여전히 2이면서 $n(B_1) = n(C_0) + 1$을 만족한다.

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & \cdots & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

행렬 B_1에서 첫 번째 열의 세 번째 행 이후 어느 행에 1이 있어도 계수는 변함없이 2이다. 이제 이와 같은 작업을 계속 반복(전 과정에서 만들어지는 행렬의 2행 1열의 수는 항상 0으로 고정한다)하여 계수가 2이면서 1의 갯수가 하나씩 늘어나는 행렬을 계속 만들어 갈 수 있으며, 마지막으로 행렬 D를 얻을 수 있다. 분명히, 행렬 D는 계수는 2이면서 $n(D) = 2020^2 - 1$이다.

6. 영역

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| \le \frac{2}{3}, \quad 0 \le x, y \le 1 \right\}$$

에 대하여 다음 적분값을 구하여라.

$$\iint_{\mathcal{D}} (1 + (x - y)^3) \, dA$$

(풀이) 우선, 주어진 적분은

$$\iint_{\mathcal{D}} (1 + (x - y)^3) \, dA = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dA + \iint_{\mathcal{D}} (x - y)^3 \, dA$$

으로 나누어 쓸 수 있다. 이변수 함수 $f(x, y) = (x - y)^3$는 $f(y, x) = -f(x, y)$를 만족하고 영역 $\mathcal{D}$는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로 두 번째 적분값은 0이다. 첫 번째 적분 값은 영역 $\mathcal{D}$의 넓이이므로 주어진 적분값은 $\frac{8}{9}$이다.

7. 두 번 미분가능한 함수 $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$가 주어져 있다. 이계도함수 $g''(x)$가 모든 점에서 연속이고 $g'(0) = g'(1) = 0$을 만족하면, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\int_0^1 \frac{g'(x)^4}{g(x)^2} dx \le 9 \int_0^1 g''(x)^2 dx$$

(풀이) 분수함수의 미분에 의하여, $\left(\frac{1}{g(x)} \right)' = -\frac{1}{g(x)^2}$이므로, 주어진 부등식의 왼쪽 식은

$$\int_0^1 \frac{g'(x)^4}{g(x)^2} dx = \int_0^1 (-g'(x))^3 \cdot \left(\frac{1}{g(x)} \right)' dx$$

으로 쓸 수 있다. 부분적분과 절대 부등식 $ab \le \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$을 이용하면

$$\int_0^1 (-g'(x))^3 \cdot \left(\frac{1}{g(x)} \right)' dx = 3 \int_0^1 \frac{(g'(x))^2}{g(x)} \cdot g''(x) dx \le \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{g'(x)^4}{g(x)^2} dx + \frac{9}{2} \int_0^1 g''(x)^2 dx$$

이 성립한다. 그러므로 주어진 부등식

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{g'(x)^4}{g(x)^2} dx \le \frac{9}{2} \int_0^1 g''(x)^2 dx$$

가 성립한다.

8. 양의 실수열 $\{a_{m,n}\}_{m\geq 0, n\geq 1}$이 모든 양의 정수 m, n에 대하여 다음 조건을 만족한다.

$$a_{m+1,n} \times a_{m-1,n+1} = a_{m,n} \times a_{m,n+1} - 1, \quad a_{0,n} = 1$$

양의 정수 m에 대하여 행렬 $B_m = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$을 다음과 같이 정의하자.

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{1,i} & i = j, \\ 1 & |i-j| = 1, \\ 0 & \text{그 밖의 모든 경우} \end{cases}$$

이때, 모든 양의 정수 m에 대하여 $a_{m,1} = \det(B_m)$이 성립함을 보여라.

(풀이) 주어진 식과 주어진 식의 m에 $m+1$을 대입하여 얻어지는 다음 두 식을 생각하자.

$$a_{m+1,n}a_{m-1,n+1} = a_{m,n}a_{m,n+1} - 1, \quad a_{m+2,n}a_{m,n+1} = a_{m+1,n}a_{m+1,n+1} - 1.$$

두 식의 차를 구하면

$$a_{m+1,n}(a_{m-1,n+1} + a_{m+1,n+1}) = a_{m,n+1}(a_{m,n} + a_{m+2,n})$$

이 되고, 양변을 $a_{m,n+1}a_{m+1,n}$으로 나누면

$$\frac{a_{m,n} + a_{m+2,n}}{a_{m+1,n}} = \frac{a_{m-1,n+1} + a_{m+1,n+1}}{a_{m,n+1}}$$

이 된다. 위 식은 음이 아닌 모든 정수 m에 대하여 성립하므로, 이를 반복 적용하여 우변에서 수열 $a_{p,q}$의 p의 값을 줄여 주면

$$\frac{a_{m,n} + a_{m+2,n}}{a_{m+1,n}} = \frac{a_{0,m+n} + a_{2,m+n}}{a_{1,m+n}}$$

을 얻을 수 있다. 이 식에 $n = 1$을 대입하여 얻은 식과 주어진 점화식에 $m = 1, n = m+1$을 대입하여 얻은 점화식 $a_{2,m+1} = a_{1,m+1}a_{1,m+2} - 1$을 이용하면

$$\frac{a_{m,1} + a_{m+2,1}}{a_{m+1,1}} = \frac{a_{0,m+1} + a_{2,m+1}}{a_{1,m+1}} = a_{1,m+2}$$

을 얻는다. 즉,

$$a_{m+2,1} = a_{1,m+2}a_{m+1,1} - a_{m,1}$$

이 성립한다. 마지막으로 m에 대한 수학적 귀납법과 행렬식의 여인자전개를 적용하면 문제에서 주어진 행렬 B_m의 행렬식도 이 점화식을 만족하고

$$a_{1,1} = \det(B_1), \quad a_{2,1} = a_{1,1}a_{1,2} - 1 = \det(B_2)$$

이므로, 모든 양의 정수 m에 대하여 $a_{m,1} = \det(B_m)$이 성립한다.