제 40회 전국 대학생 수학경시대회 (제 1 분야 풀이)

---

1. 함수 $f(x,y,z)=e^{x^2y}\sin z$에 대하여 $\nabla f\left(\sqrt{2},\frac{1}{2},\frac{\pi}{4}\right)$를 구하여라. 단, ∇f는 f의 그래디언트(gradient)이다.

(풀이) 그래디언트와 편미분의 정의에 의하여

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\left(2xy,x^2,\frac{\cos z}{\sin z}\right)f$$

가 성립힌다. 따라서 점 $\left(\sqrt{2},\frac{1}{2},\frac{\pi}{4}\right)$를 대입하면 $\nabla f\left(\sqrt{2},\frac{1}{2},\frac{\pi}{4}\right)=\left(e,\sqrt{2}e,\frac{e}{\sqrt{2}}\right)$를 얻는다.

2. 크기가 $n\times n$인 실행렬들로 이루어진 실벡터공간을 $M_n(\mathbb{R})$이라 하자. 행렬 $A\in M_n(\mathbb{R})$에 대하여 선형사상 $\Phi_A:M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R})$을 $\Phi_A(X)=AX-XA$로 정의할 때, $\det(\Phi_A)$와 $\mathrm{tr}(\Phi_A)$를 구하여라.

(풀이) 우선 $\Phi_A(I)=O$이므로 $\ker(\Phi_A)\neq\{O\}$이다. 따라서 $\det(\Phi_A)=0$임이 자명하다. 임의의 i,j에 대하여, 행렬 E_{ij}를 i행, j열만 1이고 나머지는 모두 0인 행렬로 정의하면 $\{E_{ij}\}_{1\le i,j\le n}$은 $M_n(\mathbb{C})$의 기저이다. 또한, 임의의 정수 k,s에 대하여

$$\Phi_A(E_{ij})_{ks}=(AX-XA)_{ks}=\sum_{u=1}^{n}(a_{ku}(E_{ij})_{us}-(E_{ij})_{ku}a_{us})$$

이므로

$$\mathrm{tr}(\Phi_A)=\sum_{i,j=1}^{n}(\Phi_A(E_{ij}))_{ij}=\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ii}-a_{jj})=0$$

이다.

3. 다음 적분값을 구하여라.

$$\int_0^1\int_z^1\int_{\sqrt{y}}^1\cos(x^5)\,dx\,dy\,dz$$

(풀이) 주어진 다중적분의 적분 순서를 바꾸면

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_z^1\int_{\sqrt{x}}^1\cos(y^5)\,dy\,dx\,dz&=\int_0^1\int_{\sqrt{z}}^1\int_z^{y^2}\cos(y^5)\,dx\,dy\,dz\\&=\int_0^1\int_0^{y^2}\int_z^{y^2}\cos(y^5)\,dx\,dz\,dy\\&=\int_0^1\int_0^{y^2}(y^2-z)\cos(y^5)\,dz\,dy\\&=\int_0^1\frac{1}{2}y^4\cos(y^5)\,dy=\frac{\sin 1}{10}\end{aligned}$$

이 성립한다.

4. 크기가 $n \times n$인 실대칭행렬 $A = (a_{ij})$는 서로 다른 임의의 i, j에 대하여 $a_{ij} \leq 0$을 만족하고, A의 모든 고윳값은 음이 아닌 실수이다. (단, $n \geq 2$)

(a) 행렬 A의 영공간을 $N(A)$라고 하자. 이때 다음을 보여라.

$$N(A) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v} \cdot A\mathbf{v} = 0\}$$

(b) 집합 $\{1, 2, \ldots, n\}$의 임의의 진분할 I, J에 대하여 $a_{ij} \neq 0$인 $i \in I$와 $j \in J$가 항상 존재한다고 가정하자. 이때 다음을 보여라.

$$\dim N(A) \leq 1$$

(단, 공집합이 아닌 두 집합 I, J가 $I \cup J = \{1, 2, \ldots, n\}$이고 $I \cap J = \varnothing$일 때, I, J를 $\{1, 2, \ldots, n\}$의 진분할이라고 하자.)

(풀이) (a) 가정에 의하여 P^tAP가 대각행렬이 되는 적당한 직교행렬 P가 존재한다. 이때 대각행렬의 대각원소를 $d_1, \ldots, d_n$라고 하면 가정에 의하여, 모든 $i = 1, \ldots, n$에 대하여 $d_i \geq 0$이 성립한다. 영공간의 정의로부터

$$N(A) \subset \{\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \,:\, \mathbf{v}^tA\mathbf{v} = 0 \,\}$$

은 자명하다. (단, $\mathbf{v}^t$는 $\mathbf{v}$의 전치행렬)

역으로, $\mathbf{v}$가 $\mathbf{v}^tA\mathbf{v} = 0$을 만족한다고 하자. 이때 $\mathbf{w} = P^t\mathbf{v}$라고 하면

$$0 = \mathbf{v}^tA\mathbf{v} = \mathbf{v}^tPP^tAPP^t\mathbf{v} = \mathbf{w}^tD\mathbf{w}$$

가 된다. 그리고 $d_i \geq 0$이라는 사실로부터 $D\mathbf{w} = \mathbf{0}$을 확인할 수 있다. 따라서

$$\mathbf{0} = P^tAPP^t\mathbf{v} = P^tA\mathbf{v}$$

이므로 $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$이 성립한다.

(b) 영공간 $N(A)$의 차원이 0보다 크다고 가정하자. 0이 아닌 벡터 $\mathbf{x} \in N(A)$에 대하여 $\mathbf{x}$의 성분의 절대값으로 이루어진 벡터를 $\mathbf{z}$라고 하자. 주어진 조건 $a_{ij} \leq 0$ $(i \neq j)$에 의하여

$$0 \leq \mathbf{z}^tA\mathbf{z} \leq \mathbf{x}^tA\mathbf{x} = 0$$

이 성립하고 (a)에 의하여 $\mathbf{z} \in N(A)$이 된다.

한편, 적당한 i에 대하여 $z_i = 0$ (벡터 $\mathbf{z}$의 i번째 성분)이라고 가정하자. 이러한 성질을 만족하는 i들의 집합을 I라고 하고, $J = \{1, \ldots, n\} \setminus I$ 라고 하자. 그러면 $i \in I$에 대하여

$$\sum_{j \in J} a_{ij} z_j = 0$$

로 부터 $a_{ij} = 0$ $(j \in J)$ 가 성립함을 알 수 있다. 이는 주어진 조건에 모순므로 $\mathbf{z}$의 모든 성분은 양수이다. 그러므로 $\mathbf{x}$의 모든 성분도 0이 아니다. 마지막으로 $\dim N(A) > 1$이라고 가정하자. 그러면 일차독립인 두 벡터 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in N(A)$를 선택할 수 있고, 위의 사실로부터 두 벡터의 모든 성분은 0이 아니다. 영공간은 부분공간이므로 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$의 일차결합 $a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$도 항상 $N(A)$의 원소가 되지만 적당한 계수 a, b를 선택하여 이 벡터의 어느 한 성분은 0이 될 수 있고, 이는 위 사실에 모순이 된다. 그러므로 $\dim N(A) \leq 1$ 이 성립한다.

5. 다음 적분값을 구하여라.

$$\int_0^1 \int_0^1 [x^2 + y]\, dx\, dy$$

(단, $[t]$는 실수 t를 넘지 않는 가장 큰 정수이다.)

(풀이) 먼저 $x^2 = n + \alpha$라고 하자. 여기서 $n = [x^2]$이고, 실수 α는 $0 \le \alpha < 1$을 만족하는 실수이다. 구간을 나눠서 적분하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 [n + \alpha + y]\, dy &= \int_0^{1-\alpha} [n + \alpha + y]\, dy + \int_{1-\alpha}^1 [n + \alpha + y]\, dy \\ &= \int_0^{1-\alpha} n\, dy + \int_{1-\alpha}^1 (n+1)\, dy = n + \alpha = x^2\end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서 구하고자 하는 정적분 값은

$$\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$$

이다.

6. 크기가 $n \times n$인 서로 다른 k개의 가역행렬들로 이루어진 집합 $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$가 있다. (단, $n, k \ge 2$) 임의의 $A_i \in S$에 대하여 $S = \{A_1 A_i, A_2 A_i, \ldots, A_k A_i\}$가 성립할 때,

$$(A_1 + A_2 + \cdots + A_k) - A_t$$

가 가역행렬이 되는 $A_t \in S$가 존재함을 보여라.

(풀이) 가정에 의하여, $A_1 A_t = A_1$을 만족하는 행렬 $A_t \in S$가 존재한다. 또한 A_1은 가역행렬이므로 $A_t = I \in S$는 단위행렬이다. 이제 $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_k$라 정의하자. k이하인 임의의 양의 정수 i에 대하여 $AA_i = A$이므로 $A^2 = kA$를 만족한다. 이제 $B = A - I$라 두면, $(B+I)^2 = k(B+I)$를 만족하고 $B^2 + (2-k)B + (1-k)I = O$가 성립한다. 따라서

$$B\left(\frac{1}{k-1}B + \frac{2-k}{k-1}I\right) = I$$

이므로 행렬 B는 가역이다.

(별해) 행렬 $A_1 + A_2 + \cdots + A_k - I$가 가역이 아니라고 하자. 그러면 $(A_1 + A_2 + \cdots + A_k - I)\mathbf{v} = 0$을 만족하는 0이 아닌 벡터 $\mathbf{v}$가 존재한다. 한편 $(A_1 + A_2 + \cdots + A_k)^2 = k(A_1 + A_2 + \cdots + A_k)$를 만족하므로 $k\mathbf{v} = \mathbf{v}$가 성립하게 되어 모순이다. 따라서 $A_1 + A_2 + \cdots + A_k - I$는 가역이다. k이하의 모든 양의 정수 t에 대하여 $(A_1 + A_2 + \cdots + A_k)A_t = A_1 + A_2 + \cdots + A_k$를 만족하므로 $A_1 + A_2 + \cdots + A_k - A_t = (A_1 + A_2 + \cdots + A_k - I)A_t$는 가역이다.

7. 크기가 3×3인 직교행렬 A와 B가 유한집합

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z\text{는 정수}, \;\; x^2+y^2+z^2 \le 2\}$$

에서 고윳값이 -1인 고유벡터를 두 개, 고윳값이 1인 고유벡터를 세 개 이상 가진다고 하자. 이때 $(AB)^2$, $(AB)^3$, $(AB)^4$ 중에 적어도 하나는 단위행렬 I_3임을 보여라.

(풀이) 주어진 유한집합을 R이라 하면 R의 원소는

$$R = \{\, \pm\mathbf{e}_i, \pm(\mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j) \,:\, i,j=1,2,3,\; i \ne j \,\} \quad (\text{단, } \mathbf{e}_i\text{는 단위 벡터})$$

와 같다. 가정에 의하여 $A\mathbf{v} = -\mathbf{v}$를 만족하는 벡터 $\mathbf{v} \in R$가 존재하며, $\{\pm\mathbf{v}\}$는 고유치 -1인 A의 모든 고유벡터가 된다. 벡터 $\mathbf{v}$에 수직한 평면을 H라고 하자. A는 직교행렬이므로 H는 A에 불변인 부분공간이 된다. 그리고 $R \cap H$는 적어도 4개 이상의 벡터를 가지고 있음을 $\mathbf{v}$의 경우를 나누어 확인할 수 있다.

고유치가 1인 벡터는 H에만 존재하고, 가정에 의하여 고유치가 1인 일차독립인 두 개의 벡터가 $R \cap H$에 존재하므로, A는 H에서 항등사상이 된다. 그러므로 A는 벡터 $\mathbf{v} \in R$에 수직한 평면에 대한 대칭변환이다. 같은 방법으로 B는 적당한 벡터 $\mathbf{w} \in R$에 수직한 평면에 대한 대칭변환이다. 따라서, 벡터 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$가 이루는 각을 θ라고 하면 AB는 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$에 수직인 직선은 고정시키고, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$가 이루는 평면은 $\pm 2\theta$만큼 회전이동을 시키는 변환이다. 한편 R의 임의의 두 벡터가 이루는 각은

$$\frac{k\pi}{4}\;(k=0,1,2,3) \quad \text{또는} \quad \frac{l\pi}{3}\;(l=0,1,2,3)$$

이므로, $(AB)^2 = I_3$, $(AB)^3 = I_3$, 또는 $(AB)^4 = I_3$을 만족한다.

8. 실수에서 정의된 두 번 미분가능한 실함수 f가 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$을 만족한다고 하자. 이때 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\int_0^\infty x^4 f(x)^4 dx \;\le\; 2\left(\int_0^\infty x^2 f(x)^2 dx\right)^{\frac{3}{2}} \left(\int_0^\infty x^2 f'(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

(풀이) 실수 $x \ge 0$에 대하여, 미적분학의 기본정리를 적용하면

$$f(x)^2 = f(x)^2 - \lim_{x\to\infty} f(x)^2 = -\int_x^\infty \left(f(y)^2\right)' dy = -2\int_x^\infty \left(f(y)f'(y)\right) dy$$

가 성립한다. 아래 적분 영역 내에서 $y \ge x$임을 이용한 후에 코시-슈바르츠 부등식을 적용하면

$$f(x)^2 \le \frac{2}{x^2}\int_x^\infty y^2 |f(y)||f'(y)| dy \le \frac{1}{x^2}\left(\int_0^\infty y^2 f(y)^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty y^2 f'(y)^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

을 얻을 수 있다. 따라서

$$\int_0^\infty x^4 f(x)^4 dx \le \left(\int_0^\infty x^2 f(x)^2 dx\right)\left(\sup_{x>0} x^2 f(x)^2\right) \le 2\left(\int_0^\infty x^2 f(x)^2 dx\right)^{\frac{3}{2}} \left(\int_0^\infty x^2 f'(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

이 성립한다.