제 41회 전국 대학생 수학경시대회 (제 1 분야)

2023년 11월 11일 (10:30 – 13:00)

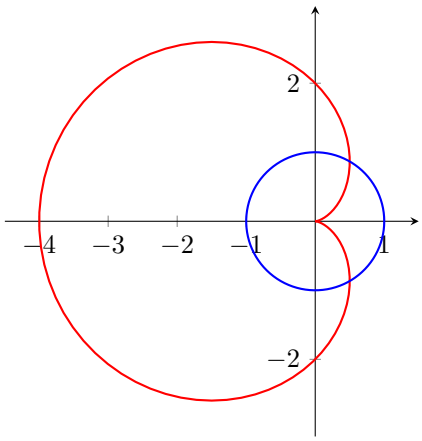
⋆ 모든 문제의 답안 작성 시 풀이과정을 명시하시오.

1. 극좌표계에서 부등식

$$2 - 2\cos\theta \le r \le 1$$

을 만족하는 영역의 넓이를 구하여라.

(풀이) 곡선 $r = 2 - 2\cos\theta$은 카디오이드(cardioid)이고 곡선 $r = 1$은 원이다. 두 곡선을 그리면 아래와 같다.



두 곡선의 교점 (r, θ)은 $2 - 2\cos\theta = 1$을 만족한다. 이것을 풀면 $\cos\theta = \frac{1}{2}$, 즉 $\theta = \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$을 얻는다. 따라서 주어진 영역의 넓이는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (2 - 2\cos\theta)^2 d\theta \\
&= \frac{\pi}{3} - 2\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta \\
&= \frac{\pi}{3} - 2\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \frac{\pi}{3} - 2\left[\frac{3\theta}{2} - 2\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} \\
&= \frac{7}{2}\sqrt{3} - \frac{5\pi}{3}.
\end{aligned}$$

2. 다음과 같이 크기가 2×2인 실행렬로 이루어진 벡터공간을 V라 하자.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

선형사상 $T : V \to V$를 $T(A) = A^t$로 정의할 때, T의 고윳값과 각 고윳값에 대응하는 고유벡터를 모두 구하여라. (단, A^t는 A의 전치행렬)

(풀이) 크기가 2×2인 실행렬로 이루어진 벡터공간을 V라고 하자. 선형사상 T는 $T^2(A) = A$ $(A \in V)$을 만족하므로 T의 고유값은 1 또는 -1 만 가능하다. 한편

$$B_1 = \{ E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21} \}, \quad B_{-1} = \{ E_{12} - E_{12} \}$$

은 각각 1, -1인 고유벡터로 이루어진 집합이고, $B = B_1 \cup B_{-1}$은 V의 기저가 된다. 따라서 T는 대각화가능하며 고유값이 1인 고유벡터는

$$aE_{11} + bE_{22} + c(E_{12} + E_{21}) \quad (a, b, c\text{는 모두가 } 0\text{은 아닌 실수})$$

이고, 고유값이 -1인 고유벡터는

$$d(E_{12}-E_{21}) \quad (d\text{는 }0\text{이 아닌 실수})$$

이다.

3. 좌표평면에서 움직이는 점 X의 위치가 시각 t에 대하여 다음과 같은 매개함수로 표현된다.

$$X(t)=3(\cos t,\ \sin t)+(\cos 15t,\ \sin 15t), \qquad t\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$$

원점을 기준으로 점 X의 각도의 변화가 시계방향인 시각 t의 범위를 구하여라.

(풀이) $\tan\theta=\dfrac{3\sin t+\sin 15t}{3\cos t+\cos 15t}$ 이고 이 식을 $\theta=\theta(t)$에 대해 미분하면

$$\frac{\theta'(t)}{\cos^2\theta}=\frac{(3\cos t+15\cos 15t)(3\cos t+\cos 15t)+(3\sin t+\sin 15t)(3\sin t+15\sin 15t)}{(3\cos t+\cos 15t)^2}$$

분자를 정리하면 $24+48\cos 14t$이다. 따라서, $\theta'(t)<0 \ \Leftrightarrow\ 1+2\cos 14t<0$.

이 부등식이 성립하는 구간은 $(\frac{1}{14}\cdot\frac{2\pi}{3},\ \frac{1}{14}\cdot\frac{4\pi}{3})=\left(\dfrac{\pi}{21},\dfrac{2\pi}{21}\right)$ 이다.

(이어지는 범위는 $(\frac{1}{14}\cdot\frac{8\pi}{3},\ \frac{1}{14}\cdot\frac{10\pi}{3})$ 인데, 이 구간은 $[0,\frac{\pi}{6}]$를 벗어남.)

(별해)

좌표평면 위에서 움직이고 있으므로 2차원 벡터 $X(t)$와 속도벡터 $X'(t)$를 외적하면 xy-평면에 수직한 z축 방향 벡터를 얻는다. 이 벡터의 z축 방향 성분이 양수이면 시계 반대 방향, 음수이면 시계 방향으로 각도의 변화가 일어남을 알 수 있다.

$$(3\cos t+\cos 15t)\cdot(3\cos t+15\cos 15t)-(3\sin t+\sin 15t)\cdot(-3\sin t-15\sin 15t)$$

를 계산하여 정리하면 위의 분자식을 얻는다.

4. 집합 $S=\{2^k \mid k\text{ 는 음이 아닌 정수}\}=\{1,2,4,8,\dots\}$라고 하자. 양의 정수 n을 S의 원소들의 합으로 표현하되, 같은 수는 최대 세 번까지만 사용하려고 한다. 이렇게 표현하는 방법의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어, $n=7$인 경우 다음과 같이 모두 네 가지 방법이 있으므로 $f(7)=4$이다.

$$7=1+1+1+4=1+1+1+2+2=1+2+2+2=1+2+4$$

이때, $f(n)$을 n에 대한 식으로 표현하여라.

(풀이) n에 대해 표현하는 방법의 개수를 $f(n)$이라하자. $f(n)$에 대한 생성함수를 구해보면

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty}f(i)x^i&=(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6)\cdots\\&=((1+x)(1+x^2))((1+x^2)(1+x^4))\cdots\\&=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots\\&=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots)(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)\\&=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\end{aligned}$$

이므로, n을 1과 2의 합으로 표현하는 방법의 개수와 같다.

따라서 n이 홀수이면 2는 0개에서 $\dfrac{n-1}{2}$개까지 사용 가능하므로 $\dfrac{n+1}{2}$개, n이 짝수이면 0개에서 $\frac{n}{2}$개까지 사용 가능하므로 $1+\frac{n}{2}$개가 답이 된다. (정답을 한 식으로 나타내면 $1+\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor$로 쓸 수 있다.)

5. (1) 크기가 $n\times n$인 실행렬 A와 B에 대하여, 행렬 AB의 고윳값은 행렬 BA의 고윳값이 됨을 증명하여라.

(2) 홀수인 양의 정수 n에 대하여 크기가 $n \times n$인 실행렬 A와 B가

$$2AB = (BA)^2 + I_n$$

을 만족할 때, $\det(I_n - AB) = 0$임을 보여라. (단, I_n은 크기가 $n \times n$인 단위행렬)

(풀이) (1) λ가 AB의 eigenvalue라고 하자. 이에 대응되는 eigenvector를 v라 하면, $ABv = \lambda v$ 이므로, 왼쪽에 B를 곱하면 $BABv = B(\lambda v) = \lambda Bv$ 가 된다. 따라서 만약 $Bv \neq \vec{0}$이면 λ는 BA의 eigenvalue가 된다. 만약 Bv가 영벡터이면, $ABv = \lambda v = 0$이므로, $\lambda = 0$이 되고 (v가 nonzero vector이므로), 따라서 $ABv = 0$ 인 nonzero vector가 존재하므로 AB는 행렬식이 0이다. 따라서 BA도 행렬식이 0이되고, 0은 BA의 eigenvalue도 된다. 그러므로, AB의 eigenvalue는 항상 BA의 eigenvalue가 된다.

(2) 행렬 BA는 홀수 크기의 실행렬이므로, 실수인 eigenvalue가 존재한다. BA의 실수인 eigenvalue 중 가장 큰 것을 λ라고 하고, 대응되는 eigenvector를 v라고 하자. 그러면

$$2(AB)v = (BA)(BA)(v) + v = \lambda^2 v + v = (\lambda^2 + 1)v$$

임을 얻고, 따라서 $\dfrac{\lambda^2+1}{2}$ 는 AB의 eigenvalue가 된다. 그런데 행렬 AB와 BA는 같은 eignenvalue를 가지므로, $\dfrac{\lambda^2+1}{2}$는 BA의 실수인 eigenvalue가 되고, 따라서

$$\frac{\lambda^2+1}{2} \leq \lambda$$

임을 얻는다. 위 부등식을 정리하면 $(\lambda - 1)^2 \leq 0$이므로 $\lambda = 1$ 임을 얻는다. 따라서 1은 BA의 eigenvalue이자 AB의 eigenvalue가 되고, $\det(I_n - AB) = 0$임을 얻는다.

6. 양의 정수의 부분집합 $S = \{k \mid 1 \leq k \leq 2023,\ k$와 2023은 서로소$\}$에 대하여 N을 다음과 같이 정의하자.

$$N = \sum_{a \in S} \sum_{b \in S} \left\{ \frac{ab}{2023} \right\}$$

이때, N이 양의 정수임을 보이고 N을 소인수분해 하여라.

(단, 실수 t에 대하여 $\{t\} = t - [t]$이고 $[t]$는 t 이하의 가장 큰 정수)

(풀이) 먼저, $2023 = 7 \cdot 17^2$이고, 이로부터 $\phi(2023) = 2^5 \cdot 3 \cdot 17$임을 알 수 있다. 고정된 자연수 $x \in S$에 대하여

$$xy = 2023a + b, \quad a, b \geq 0$$

으로 쓸 때, $b \in S$이고 $\left\{\frac{xy}{2023}\right\} = \frac{b}{2023}$임을 알 수 있다. 만약, 또다른 $y' \neq y \in S$에 대하여 마찬가지 방식으로 $xy' = 2023a' + b'$으로 쓴다면, $b \not\equiv b' \pmod{2023}$임을 알 수 있으므로,

$$\sum_{y \in S} \left\{ \frac{xy}{2023} \right\} = \sum_{b \in S} \frac{b}{2023}$$

이 성립한다. 이 값은 x의 선택에 무관하다. 따라서,

$$\begin{aligned} N &= \phi(2023) \times \sum_{b \in S} \frac{b}{2023} \\ &= \frac{\phi(2023)}{2023} \times \sum_{b \in S} b \end{aligned}$$

여기서, $\sum_{b \in S} b$는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \sum_{b \in S} b &= \sum_{b=1}^{2023} b - \sum_{b \in S^c} b \\ &= \frac{2023 \cdot 2024}{2} - \left(7(1 + 2 + \cdots + 17^2) + 17(1 + 2 + \cdots + 7 \cdot 17) - 7 \cdot 17(1 + 2 + \cdots + 17)\right) \\ &= \frac{2023 \cdot 2024}{2} - \frac{7 \cdot 289 \cdot 290}{2} - \frac{17 \cdot 119 \cdot 120}{2} + \frac{119 \cdot 17 \cdot 18}{2} \\ &= 2023 \left(\frac{2024}{2} - \frac{290}{2} - \frac{120}{2} + \frac{18}{2} \right) = \frac{2023 \times \phi(2023)}{2} \end{aligned}$$

따라서, 구하고자 하는 값은 $\frac{1}{2}\phi(2023)^2 = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 17^2$이다.

7. 수열 $\{a_n\}$이 다음 식을 만족한다.

$$\sqrt[4]{\frac{1+4x}{1-4x}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad |x| < \frac{1}{4}$$

이때, 모든 $n \geq 0$에 대하여 a_n은 음이 아닌 정수임을 보여라.

(풀이) 기하급수식으로부터

$$\frac{1+4x}{1-4x} = 1 + \sum_{n\geq 1} 2^{2n+1} x^n$$

이 성립한다. 따라서 주어진 식을 네제곱하여

$$1 + \sum_{n\geq 1} 2^{2n+1} x^n = \left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n \right)^4$$

을 얻는다. 그러면 $a_0 = 1$이고 정수 $n \geq 1$에 대하여

$$\sum_{i+j+k+\ell=n} a_i a_j a_k a_\ell = 2^{2n+1}$$

이 성립한다. 좌변에서 a_n이 네번 나타나므로

$$b_n = \sum_{\substack{i+j+k+\ell=n \\ i,j,k,\ell<n}} a_i a_j a_k a_\ell. \tag{1}$$

라 하면

$$4a_n + b_n = 2^{2n+1} \tag{2}$$

을 얻는다.

이제 정수 $n \geq 1$에 대하여 a_n이 짝수임을 증명하자. 우리는 이것을 수학적 귀납법으로 증명한다. 이를 위해 $a_1, \ldots, a_{n-1}$이 짝수라 가정하자. 그러면 (1)의 각각의 항 $a_i a_j a_k a_\ell$에 대해 다음의 경우를 살펴보자. ($i+j+k+\ell < n$이므로 다음 두가지 경우만 고려하면 된다.)

Case 1 i, j, k, ℓ 중에서 0인 것들이 한개 이하인 경우. 이 경우 $a_i a_j a_k a_\ell$은 짝수가 적어도 3개 곱해져 있으므로 8의 배수가 된다.

Case 2 i, j, k, ℓ에서 0인 것이 두개인 경우. 일반성을 잃지 않고 $k = \ell = 0$라 하자. 그러면 항 $a_i a_j a_0 a_0$은 4의 배수이며 이 값은 (1)의 우변에서 $\binom{4}{2} = 6$번 등장하게 된다. 따라서 이러한 항들의 합은 8의 배수가 된다.

위의 두가지 경우로부터 b_n이 8의 배수임을 얻는다. 그러면 (2)에 의해 a_n이 짝수가 되어 위의 주장이 증명되었다.

위의 주장으로부터 a_n이 항상 정수가 됨을 보였다. 이제 $a_n \geq 0$을 보이면 된다. 이를 위해 다음을 관찰하자.

$$\sqrt[4]{\frac{1+4x}{1-4x}} = \exp\left(\frac{1}{4} \log \frac{1+4x}{1-4x} \right). \tag{3}$$

여기서

$$\log \frac{1+4x}{1-4x} = \log(1+4x) - \log(1-4x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}(4x)^n}{n} + \sum_{n\geq 1} \frac{(4x)^n}{n} = \sum_{n\geq 0} \frac{2(4x)^{2n+1}}{2n+1}$$

이 음이 아닌 계수를 가지므로 (3)의 우변을 테일러 전개하면 역시 음이 아닌 계수를 가지므로 $a_n \geq 0$이 되어 증명이 완료된다.

($a_n \geq 0$에 대한 별해) 주어진 식의 좌변을 미분하면

$$\frac{d}{dx} \sqrt[4]{\frac{1+4x}{1-4x}} = \frac{2}{1-16x^2} \sqrt[4]{\frac{1+4x}{1-4x}}$$

이 된다. 따라서

$$(1-16x^2)\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

이고 양변의 x^n의 계수를 비교하면

$$(n+1)a_{n+1} - 16(n-1)a_{n-1} = 2a_n$$

이 된다. 즉,

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)}\left(2a_n + 16(n-1)a_{n-1}\right)$$

이므로 수학적귀납법에 의해 $a_n \geq 0$이 얻어진다.