제42회 전국 대학생 수학경시대회 (1분야)

2024년 11월 2일 (10:30 – 13:00)

⋆ 모든 문제의 답안 작성 시 풀이과정을 명시하시오.

1. 다음 행렬 A에 대하여 등식 $A^5 = aA^2 + bA + cI$가 성립하도록 하는 실수 a, b, c를 구하여라.
(단, I는 3×3 단위행렬)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(풀이). 케일리 해밀턴 정리에 의하여 $A^3 + 3A = O$. 따라서 $A^5 = A^3 \cdot A^2 = -3A^3 = 9A$.

그러므로 $a = 0, b = 9, c = 0$. ◇

2. 3차원 좌표공간에서 식 $4z^2 = x^2 + y^2 - 1$로 주어진 곡면을 S라 하자. 곡면 S가 점 $P(1, 2, 1)$을 지나는 직선을 정확히 두 개 포함하고 있음을 보이고, 두 직선이 이루는 예각을 θ라 할 때 $\cos\theta$의 값을 구하여라.

(풀이). 곡면의 식으로부터 $(2z + x)(2z - x) = (y + 1)(y - 1)$ 이 성립하므로 두 직선은 다음과 같이 주어진다.

$$\ell_1 \quad : \quad 2z + x = k_1(y + 1),\ 2z - x = \frac{1}{k_1}(y - 1)$$
$$\ell_2 \quad : \quad 2z + x = k_2(y - 1),\ 2z - x = \frac{1}{k_2}(y + 1)$$

두 직선이 점 $P(1, 2, 1)$을 지나므로 $k_1 = 1, k_2 = 3$.

직선 ℓ_1의 방향벡터는 $(1, -1, 2) \times (1, 1, -2) = 2(0, 2, 1)$,

직선 ℓ_2의 방향벡터는 $(1, -3, 2) \times (1, \frac{1}{3}, -2) = \frac{2}{3}(8, 6, 5)$.

따라서 두 벡터의 사잇각 θ에 대하여

$$\cos\theta = \frac{(0, 2, 1) \cdot (8, 6, 5)}{\sqrt{5}\sqrt{125}} = \frac{17}{25}.$$

◇

(별해 1). 직선의 식을 $(1, 2, 1) + t(a, b, c)$로 놓고 곡면의 식에 대입하자.

$$4(tc + 1)^2 = (ta + 1)^2 + (tb + 2)^2 - 1$$

로부터 t에 대한 항등식 $t^2(4c^2 - a^2 - b^2) + t(8c - 2a - 4b) = 0$ 을 얻고, 따라서

$$a : b : c = 0 : 2 : 1 \quad \text{또는} \quad a : b : c = 8 : 6 : 5$$

위와 마찬가지로 계산하여 $\cos\theta = \frac{17}{25}$을 얻는다. ◇

(별해 2). 곡면 S의 접평면 T_PS는 점 P를 지나면서 곡면 S에 포함되는 곡선의 접선들의 모임이다. 따라서 점 P를 지나는 직선이 곡면 S에 포함되면 이 직선 전체가 접평면 T_PS에 포함된다.

문제에서 접평면의 법선 벡터는 $f(x,y,z)=x^2+y^2-4z^2-1$에 대하여

$$\nabla f(P)=(1,2,-4)$$

이므로 접평면의 식은 $x+2y-4z=1$ 이다. $4z=x+2y-1$을 곡선의 식에 대입하여 정리하면 다음 식을 얻는다.

$$3x^2-4xy+2x+4y-5=0$$

이 식의 좌변은 $(3x-(4y-5))(x-1)$ 로 인수분해되며, 따라서 $S\cap T_PS$는 다음 두 직선의 합집합과 같다.

$$\ell_1:(x=1,\ y=2z),\qquad \ell_2:(3x=4y-5,\ 5y=6z+4)$$

이후 계산은 위 풀이를 따른다. ◇

3. 다음 식을 만족하는 실수 N을 구하여라.

$$\sum_{k=1}^{2024}(2025-k)\cdot 2024^k\cdot 2025^{2024-k}=2024^N$$

(풀이). 먼저 k를 $2025-k$로 바꿔주면 다음을 얻는다.

$$\sum_{k=1}^{2024}(2025-k)\cdot 2024^k\cdot 2025^{2024-k}=\sum_{k=1}^{2024}k\cdot 2024^{2025-k}\cdot 2025^{k-1}=2024^{2024}\sum_{k=1}^{2024}k\left(\frac{2025}{2024}\right)^{k-1}.$$

한편 등비급수의 합의 공식에 의해 항등식 $\sum_{k=1}^{n}x^k=\frac{x-x^{n+1}}{1-x}$을 얻고, 양변을 미분하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}&=\frac{(1-(n+1)x^n)(1-x)-(x-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2}\\&=\frac{1-x-(n+1)x^n+(n+1)x^{n+1}+x-x^{n+1}}{(1-x)^2}\\&=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

항등식이므로 $x=\frac{n+1}{n}$을 대입하면 $(n+1)x^n+nx^{n+1}=0$이어서 다음을 얻는다.

$$\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k-1}=n^2.$$

이 식에 $n=2024$를 대입하면 문제에서 주어진 등식의 좌변이 2024^{2026}임을 알 수 있다. 따라서 $N=2026$ 이다. ◇

(별해). $n=2024$, $a=\frac{n}{n+1}$라 하자. 그러면 주어진 식의 좌변을 아래와 같이 쓸수 있다.

$$\begin{aligned}(n+1)^n\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a^k&=(n+1)^n\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=k}^{n}a^k=(n+1)^n\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{\ell}a^k\\&=(n+1)^n\sum_{\ell=1}^{n}\frac{a(1-a^\ell)}{1-a}=(n+1)^n\frac{a}{1-a}\left(n-\frac{a(1-a^n)}{1-a}\right).\end{aligned}$$

여기서 $\frac{a}{1-a}=n$이므로, 위의 식은 다음과 같다.

$$(n+1)^n\cdot n\cdot(n-n+n\cdot a^n)=(n+1)^n\cdot n^2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=n^{n+2}=2024^{2026}.$$

따라서 $N=2026$이다. ◇

4. 37^{2024}의 십의 자리 숫자, 일의 자리 숫자를 각각 구하여라.

(풀이).

$$37^{24} = 43335257111193343900365036083324748961$$

이므로 정답은 61.

$37^{2024} \equiv 1^{2024} = 1 \pmod 4$이고, $37^{2024} \equiv 12^{2024} \equiv 12^4 \pmod{25}$이다. $12^2 = 144 \equiv -6 \pmod{25}$이므로 $12^4 \equiv 36 \equiv 11 \pmod{25}$이다. 즉, $37^{2024} \equiv 11 \pmod{25}$이다. 중국인의 나머지 정리에 의해 $37^{2024} \equiv 61 \pmod{100}$이 성립한다. 따라서 십의 자리는 6, 일의 자리는 1이다. ◇

5. 실수 전체에서 정의된 실함수 $f(x)$는 두 번 미분가능하고 $f''(x)$가 연속이다. 그리고 모든 x에 대하여 $f'(x) > 0$ 이고 $f''(x) < 0$ 이다. 이때 임의의 양수 t에 대하여 다음이 성립함을 증명하여라.

$$\left| \int_0^t \cos\big(f(x)\big) dx \right| \le \frac{2}{f'(t)}$$

(풀이). 연쇄 법칙에 의해

$$\frac{d}{dx}\Big(\sin\big(f(x)\big)\Big) = f'(x)\cos\big(f(x)\big)$$

이 성립하므로

$$\int_0^t \cos\big(f(x)\big)\, dx = \int_0^t \frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx}\Big(\sin\big(f(x)\big)\Big)\, dx$$

이다. 여기서 $f'(x) > 0$이고 연속이므로 우변의 적분은 잘 정의된다. 따라서, 부분적분을 사용하면

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^t \cos\big(f(x)\big)\, dx \right| &\le \left| \frac{1}{f'(x)} \sin\big(f(x)\big) \Big|_{x=0}^t \right| + \left| \int_0^t \frac{f''(x)}{\big(f'(x)\big)^2} \sin\big(f(x)\big)\, dx \right| \\
&\le \frac{1}{f'(t)} + \frac{1}{f'(0)} + \int_0^t \left| \frac{f''(x)}{f'(x)^2} \sin\big(f(x)\big) \right| dx \\
&\le \frac{1}{f'(t)} + \frac{1}{f'(0)} + \int_0^t \frac{|f''(x)|}{f'(x)^2}\, dx
\end{aligned}$$

이 성립한다. $f''(x) < 0$이므로

$$\int_0^t \frac{|f''(x)|}{\big(f'(x)\big)^2}\, dx = -\int_0^t \frac{f''(x)}{\big(f'(x)\big)^2}\, dx = \frac{1}{f'(x)}\Big|_{x=0}^t = \frac{1}{f'(t)} - \frac{1}{f'(0)}$$

이 되어 문제의 부등식을 얻는다. ◇

6. 아래 두 조건을 만족하는 n 개의 실수 $a_1, a_2, \ldots, a_n$에 대하여 $\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{k+1}\right) + a_n a_1$의 최댓값을 구하여라. (단, $n \ge 3$)

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0, \qquad a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$$

(풀이). $V = \mathbb{C}^n$이라 하고 선형사상 $\phi : V \to V$를 다음과 같이 정의하자.

$$\phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1)$$

(n-th root of unity) $\zeta = e^{2\pi i/n} = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$와 $1 \le k \le n$에 대하여

$$v_k = (\zeta^k, \zeta^{2k}, \ldots, \zeta^{nk})$$

이라 하자. (예컨대 $v_n = (1, 1, \ldots, 1)$이다.) 그러면 다음이 성립한다.

- $\phi(v_k) = \zeta^k v_k$. 즉, v_k는 ϕ의 (고유값 ζ^k에 대한) 고유벡터이다. 특히, 벡터 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$은 복소 벡터공간 $V = \mathbb{C}^n$의 기저를 이룬다.

- $v_k \cdot \overline{v}_k = (\zeta^k, \zeta^{2k}, \ldots, \zeta^{nk}) \cdot (\zeta^{-k}, \zeta^{-2k}, \ldots, \zeta^{-nk}) = n$

- $j := k_1 - k_2 \neq 0 \;\Rightarrow\; v_{k_1} \cdot \overline{v}_{k_2} = \zeta^j + \zeta^{2j} + \cdots + \zeta^{nj} = 0$

다음과 같이 문제의 조건을 만족시키는 임의의 벡터 v를 생각하자.

(1) $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

(2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$.

(3) $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$.

벡터 v의 기저 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$에 대한 좌표 표현이 다음과 같다고 하자.

$$v = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k \ (c_k \in \mathbb{C})$$

조건 (2)에 의하여,

$$0 = v \cdot (1, 1, \ldots, 1) = v \cdot \overline{v}_n = \sum_{k=1}^{n} c_k (v_k \cdot \overline{v}_n) = n c_n.$$

조건 (3)에 의하여,

$$1 = v \cdot \overline{v} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_j \overline{c}_k (v_j \cdot \overline{v}_k) = n \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2.$$

이로부터 $c_n = 0, \;\; n \sum_{k=1}^{n-1} |c_k|^2 = 1$ 을 얻는다. 이제,

$$\begin{aligned} a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_{n-1} a_n + a_n a_1 &= \phi(v) \cdot \overline{v} = \left(\sum_{j=1}^{n} (\zeta^j c_j) v_j \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \overline{c}_k \overline{v}_k \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (\zeta^j c_j \overline{c}_k)(v_j \cdot \overline{v}_k) \\ &= n \sum_{k=1}^{n-1} \zeta^k |c_k|^2. \end{aligned}$$

이 값이 실수이므로,

$$\begin{aligned} a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_{n-1} a_n + a_n a_1 &= n \sum_{k=1}^{n-1} \zeta^k |c_k|^2 \\ &= n \cdot \mathrm{Re} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \zeta^k |c_k|^2 \right) \\ &= n \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{Re}(\zeta^k) |c_k|^2 \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n-1} \{ \mathrm{Re}(\zeta^k) \} \times n \sum_{k=1}^{n-1} |c_k|^2 \\ &= \cos(2\pi/n). \end{aligned}$$

따라서 $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1$의 최댓값은 $\cos(2\pi/n)$이며, 이 값을 갖게 되는 것은

$$c_2 = c_3 = \cdots = c_{n-2} = 0$$

이 되는 경우이므로, $v = c_1v_1 + c_{n-1}v_{n-1}$ 의 꼴이다. 이때

$$v = c_1(\zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^n) + c_{n-1}(\overline{\zeta}, \overline{\zeta}^2, \ldots, \overline{\zeta}^n) \in \mathbb{R}^n.$$

이므로 $c_{n-1} = \overline{c}_1$임을 알 수 있다. 또한 $n(|c_1|^2 + |c_{n-1}|^2) = 1$ 이므로

$$v = c \cdot (\zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^n) + \overline{c} \cdot (\overline{\zeta}, \overline{\zeta}^2, \ldots, \overline{\zeta}^n), \quad |c| = \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

의 꼴임을 알 수 있다. 특히 $c = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$일때,

$$v = \frac{2}{\sqrt{n}}\left(\cos\frac{2\pi}{n}, \cos\frac{4\pi}{n}, \cdots, \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}, 1\right)$$

으로 택하면 최댓값 $\cos(2\pi/n)$를 얻는다. ◇

7. 2차원 좌표평면 위의 유한한 닫힌 볼록 영역 $\mathcal{D}$에 대하여 $\mathcal{D}$의 경계 β가 다음을 만족한다고 하자.

(1) β는 매끄러운 단순폐곡선이다.

(2) β 위의 임의의 점 O에 대하여 O를 중심으로 하는 반지름이 1인 원은 β와 두 점에서만 만난다.

(3) β 위의 임의의 점 O에서 그린 접선은 O를 제외한 다른 점에서 β와 만나지 않는다.

길이가 1인 막대 PQ의 중점을 M이라 하자. 막대의 양 끝점 P, Q가 항상 β 위에 놓이도록 막대를 한 바퀴 돌리면(즉, 곡선 β를 따라 두 점 P, Q를 연속적으로 한 바퀴 돌리면) M의 자취가 단순폐곡선 γ가 된다고 하자. 이때 두 곡선 β와 γ 사이에 있는 영역의 넓이가 $\dfrac{\pi}{4}$임을 보여라.

(풀이). γ로 둘러싸인 영역을 $\mathcal{E}$라 할 때

$$\mathrm{Area}(\mathcal{D}) - \mathrm{Area}(\mathcal{E}) = \frac{\pi}{4}$$

임을 보이면 된다.

막대의 양 끝점을 P, Q라 하고 양의 x축을 기준으로 벡터 $\overrightarrow{QP}$의 각도를 $t(0 \le t < 2\pi)$라 하자. M의 좌표를 (x, y)라 하면 P의 좌표 (x_P, y_P)와 Q의 좌표 (x_Q, y_Q)는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_P = x + \frac{1}{2}\cos t, \quad y_P = y + \frac{1}{2}\sin t$$

$$x_Q = x - \frac{1}{2}\cos t, \quad y_Q = y - \frac{1}{2}\sin t$$

매개변수 t가 0에서 2π로 움직이는 동안 P는 곡선 β를 모두 지난다. 따라서 영역 $\mathcal{D}$의 넓이는 그린 정리에 의해

$$\mathrm{Area}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x_P\frac{dy_P}{dt} - y_P\frac{x_P}{dt}\right)dt$$

이 된다. 이를 정리하면

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\left(x + \frac{1}{2}\cos t\right)\left(\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}\cos t\right) - \left(y + \frac{1}{2}\sin t\right)\left(\frac{dx}{dt} - \frac{1}{2}\sin t\right)\right]dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{x}{dt}\right)dt + \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)dt \\
&\qquad + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[\left(x + \frac{dy}{dt}\right)\cos t + \left(y - \frac{dx}{dt}\right)\sin t\right]dt \\
&= \mathrm{Area}(\mathcal{E}) + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[\left(x + \frac{dy}{dt}\right)\cos t + \left(y - \frac{dx}{dt}\right)\sin t\right]dt
\end{aligned}$$

이 된다. 비슷하게, 점 Q도 곡선 β를 모두 지나므로

$$\begin{aligned}
\mathrm{Area}(\mathcal{D}) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x_Q\frac{dy_Q}{dt} - y_Q\frac{x_Q}{dt}\right)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\left(x-\frac{1}{2}\cos t\right)\left(\frac{dy}{dt}-\frac{1}{2}\cos t\right) - \left(y-\frac{1}{2}\sin t\right)\left(\frac{dx}{dt}+\frac{1}{2}\sin t\right)\right]\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{x}{dt}\right)\,dt + \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)\,dt \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[\left(-x-\frac{dy}{dt}\right)\cos t + \left(-y+\frac{dx}{dt}\right)\sin t\right]\,dt \\
&= \mathrm{Area}(\mathcal{E}) + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[\left(x+\frac{dy}{dt}\right)\cos t + \left(y-\frac{dx}{dt}\right)\sin t\right]\,dt
\end{aligned}$$

두 식을 더하면

$$2\mathrm{Area}(\mathcal{D}) = 2\mathrm{Area}(\mathcal{E}) + \frac{\pi}{2}$$

이므로

$$\mathrm{Area}(\mathcal{D}) - \mathrm{Area}(\mathcal{E}) = \frac{\pi}{4}$$

임을 얻는다.

◇