제43회 대학생 수학경시대회 (1분야)

2025년 11월 1일 (10:30 – 13:00)

⋆ 모든 문제의 답안 작성 시 풀이과정을 명시하시오.

1. 다음 조건을 모두 만족하는 미분가능한 이변수함수 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$가 주어져 있다.

$$f(0,0) = 0, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t)}{t} = 2, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{f(t,2t)}{t} = -1$$

조건 $a^2 + b^2 = 1$을 만족하는 실수 a, b에 대하여 다음 극한이 가질 수 있는 최댓값과 최솟값을 구하여라.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(at,bt)}{t}$$

(풀이) $m = f_x(0,0)$, $n = f_y(0,0)$이라 하면 $m + n = 2$이고 $m + 2n = -1$이므로 $m = 5, n = -3$을 얻는다. $(a,b) = (\cos\theta, \sin\theta)$로 매개화하면 구하려는 극한값은 $5\cos\theta - 3\sin\theta$가 되고, 따라서 최댓값과 최솟값은 각각 $\pm\sqrt{5^2+3^2} = \pm\sqrt{34}$이다.

2. 다음의 조건 $(\star)$을 만족하는 최소의 양의 정수 k를 구하여라.

$(\star)$ 임의의 서로 다른 k 개의 정수 중에는 $7 \mid (m^2 + 13n^2)$인 서로 다른 두 수 m, n이 항상 존재한다.

(풀이) 일단 $m^2 + 13n^2 \equiv m^2 - n^2 = (m-n)(m+n) \mod 7$을 관찰하자. $k = 4$인 경우 4개의 정수를 $0, 1, 2, 3$으로 잡으면 조건을 만족하지 않는다. $k = 5$인 경우 k개의 정수가 있으면 비둘기집의 원리에 의해 나머지가 $\{0\}, \{1,6\}, \{2,5\}, \{3,4\}$ 중에 적어도 한 집합에서 두 번 나타나게 된다. 이러한 두 수는 $(m-n)(m+n) \equiv 0 \mod 7$ 이므로 조건을 만족한다. 따라서 정답은 5이다.

3. 크기가 2×2인 실행렬 A와 B에 대하여 행렬 $U(A,B)$를 다음과 같이 정의하자.

$$U(A,B) = ABAB - BABA$$

다음을 만족하는 크기가 2×2인 실행렬 X와 Y가 존재하는 실수 a의 값을 모두 구하여라.

$$U(X,Y)^{2025} - U(X,Y)^{1101} = aI$$

(단, I는 크기가 2×2인 항등행렬이다.)

(풀이) $\mathrm{tr}(CD) = \mathrm{tr}(DC)$가 성립하므로 $C = A, D = BAB$로 택하면 $\mathrm{tr}(U(A,B)) = 0$을 얻는다. 따라서 케일리-해밀턴 정리에 의해 $U(A,B)^2 = kI$가 되고 위 식을 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} U(X,Y)^{2025} - U(X,Y)^{1101} &= U(X,Y)(U(X,Y)^2)^{550}(U(X,Y)^2)^{462} - I) \\ &= U(X,Y)(k^{550}(k^{462}-1)I) = k^{550}(k^{462}-1)U(X,Y) = aI \end{aligned}$$

$a \neq 0$이면 $k^{550}(k^{462}-1) \neq 0$이고 $U(X,Y) = ak^{-550}(k^{462}-1)^{-1}I$가 된다. 하지만 이는 $U(X,Y)$의 대각합이 0이라는 것에 모순이다. 따라서 $a = 0$인 경우 밖에 없다. 한편, $X = Y$로 택하면 $U(X,Y) = 0$을 얻고 주어진 식이 성립한다.

4. 양의 정수 n과 양수 a_{ij} $(1 \le i, j \le n)$에 대하여 A_n, B_n, C_n을 다음과 같이 정의하자.

$$A_n = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^2, \quad B_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\right)^{\frac{1}{2}}\right), \quad C_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

다음 부등식을 증명하여라.

$$A_n \le nB_n \le n^2 C_n$$

(풀이) 편의상 $1 \le i, j \le n$에 대해 r_i와 c_j를 다음과 같이 정의하자.

$$r_i := \sum_{k=1}^{n} a_{ik}, \qquad c_j := \sum_{k=1}^{n} a_{kj}$$

이를 이용하면 B_n을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$B_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_i^{1/2} c_j^{1/2}$$

주어진 부등식을 증명하기 위해 $A_n \le nB_n$과 $B_n \le nC_n$을 각각 증명하자.

(Step 1) $A_n \le nB_n$의 증명

코시–슈바르츠 부등식에 의해

$$A_n \le B_n \times \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{r_i^{1/2} c_j^{1/2}}$$

이 성립하므로 다음을 보이면 충분하다.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{r_i^{1/2} c_j^{1/2}} \le n \tag{1}$$

산술기하 부등식에 의해 $\frac{1}{r_i^{1/2} c_j^{1/2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{c_j}\right)$ 이므로, 다음이 성립한다.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{r_i^{1/2} c_j^{1/2}} \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{r_i} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ij}}{c_j}$$

그런데, 정의에 의해 $\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{r_i} = 1$, $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ij}}{c_j} = 1$이므로 위의 부등식의 우변은 n이고, (1)이 성립한다.

(Step 2) $B_n \le nC_n$의 증명

산술기하 부등식에 의해 다음을 얻는다.

$$B_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_i^{1/2} c_j^{1/2} \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(r_i + c_j)$$

여기서

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_i = \sum_{i=1}^{n}\left(r_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i^2$$

이며, 마찬가지로 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = \sum_{j=1}^{n} c_j^2$ 이므로, 위의 부등식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$B_n \le \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^2 + \sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)$$

그런데 코쉬-슈바르츠 부등식에 의해

$$nC_n = \sum_{i=1}^{n}\left(n\sum_{j=1}^{n} a_i j^2\right) \ge \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_i j\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} r_i^2$$

을 얻고, $nC_n \ge \sum_{j=1}^{n} c_j^2$ 역시 같은 방법으로 얻어지므로 증명이 끝난다.

5. 양의 정수 n과 k에 대하여 평면 위의 점 $P_{n,k}$를 다음과 같이 정의하자.

$$P_{n,k} = \left(n\cos\frac{2k\pi}{n},\ n\sin\frac{2k\pi}{n} \right)$$

점 $P_{n,k}$를 중심으로 하고 반지름이 $n+1$인 원의 내부를 $D_{n,k}$라 하고 $D_n = \bigcap_{k=1}^{n} D_{n,k}$라 하자. 다음 극한을 구하여라.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{D_n} x^2 e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

(풀이) (Step 1) 원점이 중심이고 반지름이 r인 원의 내부를 $B(r)$로 표현하자. 우선 모든 $k = 1, \ldots, n$에 대하여 $D_{n,k}$는 $B(1)$을 포함하므로

$$B(1) \subset D_n$$

임 됨을 알 수 있다.

중심이 $P_{n,k}$이고 반지름이 $n+1$인 원을 $S_{n,k}$라 하고, 각각의 $i = 1, \ldots, n$에 대해 $Q_{n,i}$를 두 원 $S_{n,i}$와 $S_{n,i+1}$ 두 교점 중 원점에 가까운 교점이라 하자. 그러면 대칭성에 의해 점 $Q_{n,i}$는 원점이 중심인 정 n각형의 꼭지점이 되고 원점으로부터 떨어진 거리가 모두 같게 된다. 이 거리를 r_n이라하면, ($Q_{n,i}$가 D_n의 n개의 "꼭지점"이 되므로)

$$D_n \subset B(r_n)$$

임을 알 수 있다. 여기서 r_n의 값을 찾기 위해 삼각형의 코사인 법칙을 사용하자. 원점을 O라 지칭하면 $\triangle P_{n,k}OP_{n,k+1}$은 두 변 $\overline{P_{n,k}O}$, $\overline{P_{n,k+1}O}$의 길이가 같은 이등변 삼각형이고 $\angle P_{n,k}OP_{n,k+1} = \frac{2\pi}{n}$이다. 두 점 O와 $Q_{n,k}$를 지나는 직선이 $\angle P_{n,k}OP_{n,k+1}$을 정확히 이등분 하므로 $\angle P_{n,k}OQ_{n,k} = \pi - \frac{\pi}{n}$이 된다. 즉, $\triangle P_{n,k}OQ_{n,k}$는 $|\overline{OP_{n,k}}| = n$, $|\overline{OQ_{n,k}}| = r_n$, $|\overline{Q_{n,k}P_{n,k}}| = n+1$이고 $\angle P_{n,k}OQ_{n,k} = \pi - \frac{\pi}{n}$인 삼각형이 된다. 이제 코사인 법칙을 적용하면,

$$|\overline{Q_{n,k}P_{n,k}}|^2 = |\overline{OP_{n,k}}|^2 + |\overline{OQ_{n,k}}|^2 - 2|\overline{OP_{n,k}}||\overline{OQ_{n,k}}|\cos\angle P_{n,k}OQ_{n,k},$$

즉,

$$(n+1)^2 = n^2 + r_n^2 - 2nr_n\cos\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right)$$

이 되고, 이를 r_n에 대한 식으로 정리하면

$$r_n^2 + 2\left(n\cos\frac{\pi}{n}\right)r_n - (2n+1) = 0$$

이 성립한다. 근의 공식을 적용하면, $r_n > 0$이므로

$$r_n = -n\cos\frac{\pi}{n} + \sqrt{n^2\cos^2\frac{\pi}{n} + 2n + 1}$$

이 됨을 알 수 있다. 그리고

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n\cos\frac{\pi}{n} + \sqrt{n^2\cos^2\frac{\pi}{n} + 2n + 1}} = 1$$

이 성립한다.

이를 종합하면,

$$B(1) \subset D_n \subset B(r_n) \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Area}\big(B(r_n) \setminus B(1)\big) = 0$$

이 성립한다.

(Step 2) $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$이므로 어떤 양수 n_0가 존재하여 $n > n_0$이면 $r_n < 2$가 성립하고, 이 경우 $(x,y) \in B(r_n)$에 대해 $F(x,y) = x^2e^{-(x^2+y^2)} < 4$이다. $A = \int_{B(1)} F(x,y)\,dxdy$라 하면, $n > n_0$에 대해

$$\left| \int_{D_n} F(x,y)\,dxdy - A \right| \le \int_{D_n\setminus B(1)} F(x,y)\,dxdy \le \int_{B(r_n)\setminus B(1)} F(x,y)\,dxdy \le 4\mathrm{Area}\big(B(r_n)\setminus B(1)\big)$$

이 성립하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{D_n} F(x,y)\,dxdy - A\right| = 0$$

이다. 즉,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{D_n} F(x,y)\,dxdy = A$$

이다.

이제 A의 값을 구하면 된다. 극좌표 변환을 하면

$$A = \int_0^1\int_0^{2\pi} r^3e^{-r^2}\cos^2\theta\,d\theta\,dr = \int_0^1 r^3e^{-r^2}\,dr\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{e-2}{2e}\pi$$

이다. 따라서, 구하는 답은 $\frac{e-2}{2e}\pi$ 이다.

6. 양의 정수 n과 실수 α에 대하여 크기가 $n\times n$인 행렬 A를 다음과 같이 정의하자.

$$A = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \sin(2\alpha) & \cdots & \sin(n\alpha) \\ \sin(2\alpha) & \sin(4\alpha) & \cdots & \sin(2n\alpha) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(n\alpha) & \sin(2n\alpha) & \cdots & \sin(n^2\alpha) \end{pmatrix}$$

짝수 n과 $\alpha = \frac{\pi}{n+1}$에 대하여 행렬식 $\det A$의 값을 구하여라.

(풀이) 삼각함수 등식 $\sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$에 의해 A^2 의 (i,j) 성분은 다음과 같다.

$$(A^2)_{ij} = \sum_{k=1}^n \sin(ik\alpha)\sin(kj\alpha) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^n\cos k(i-j)\alpha - \sum_{k=1}^n\cos k(i+j)\alpha\right)$$

삼각함수 등식 $\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$에 의해 $\sin(x/2)\neq 0$인 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n\cos kx &= \frac{1}{\sin(x/2)}\sum_{k=1}^n\sin(x/2)\cos kx \\ &= \frac{1}{2\sin(x/2)}\sum_{k=1}^n(\sin(k+1/2)x - \sin(k-1/2)x) \\ &= \frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$1\le i,j\le n$인 서로 다른 자연수 i,j에 대하여 $x = (i\pm j)\alpha = \frac{(i\pm j)\pi}{n+1}$라 하면 $\sin(x/2)\neq 0$이고

$$\sin(n+1/2)x = \sin((i\pm j)\pi - x/2) = (-1)^{i+j+1}\sin(x/2)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^n\cos(i\pm j)\alpha = \sum_{k=1}^n\cos kx = \frac{(-1)^{i+j+1}-1}{2}$$

을 얻는다. 따라서 $i\neq j$인 경우 A^2의 (i,j) 성분은 0이 된다.

이제 A^2의 대각성분을 알아보자. $x = (i+i)\alpha = \frac{2i\pi}{n+1}$라 하면 $\sin(x/2) = \sin(\frac{i\pi}{n+1})\neq 0$이므로 위의 계산에 의해

$$(A^2)_{ii} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^n\cos 0 - \sum_{k=1}^n\cos(k(i+i)\alpha)\right) = \frac{1}{2}\left(n - \frac{(-1)^{i+i+1}-1}{2}\right) = \frac{n+1}{2}$$

이다. 따라서 $A^2 = \frac{n+1}{2}I$을 얻는다. 그러면

$$\left(A - \sqrt{\frac{n+1}{2}}I\right)\left(A + \sqrt{\frac{n+1}{2}}I\right) = 0$$

에서 A의 가능한 고윳값은 $\sqrt{\frac{n+1}{2}}$와 $-\sqrt{\frac{n+1}{2}}$이다. 또한 n이 짝수이므로

$$\begin{aligned}2\mathrm{tr}(A) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sin(k^2\alpha) + \sin((n+1-k)^2\alpha)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sin(k^2\alpha) + \sin((n+1)\pi - 2k\pi + k^2\alpha)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sin(k^2\alpha) + \sin(\pi + k^2\alpha)\right) = 0\end{aligned}$$

에서 고윳값은 $\sqrt{\frac{n+1}{2}}$와 $-\sqrt{\frac{n+1}{2}}$이 각각 $n/2$개씩 있다. 따라서

$$\det A = (-1)^{n/2} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n/2}$$

이다.

7. 양의 정수 n에 대하여 다음 조건을 모두 만족하는 $\{1, 2, \ldots, n\}$의 순열 π의 개수를 a_n이라 하자.

- $1 \le i \le n$인 모든 정수 i에 대하여 $(\pi \circ \pi)(i) = i$이다.
- $1 \le a < b < c < d \le n$과 $\pi(a) > \pi(b) > \pi(c) > \pi(d)$를 동시에 만족하는 정수 a, b, c, d가 존재하지 않는다.

다음 극한을 구하여라.

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n}$$

(풀이) 두 조건을 모두 만족하는 순열을 좋은 순열이라 하자. 첫 번째 조건에 의해 좋은 순열 π는 i와 $\pi(i)$의 자리를 서로 바꾼 것으로 이해할 수 있다. 예컨대 $n = 10$이라 하고 이를 도식화하면 다음 그림을 얻는다.

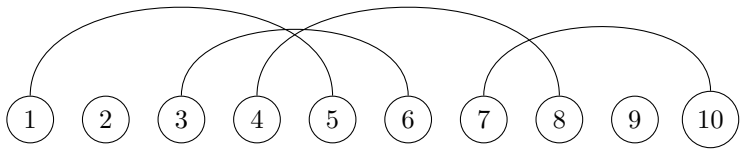


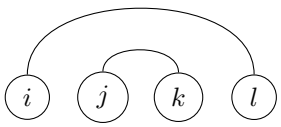
그림 A

(여기서 2와 9는 π의 고정점이다.) 이제 그림 A와 같이 도식화한 좋은 순열을 다음과 같이 길이가 n인 문자열로 표기하자. 점이 호를 기준으로 왼쪽 점인 경우에는 L, 오른쪽 점인 경우에는 R, 고정점인 경우에는 F로 표기한다. 이 표기법에 따르면 그림 A는 $LFLLRRLRFR$이 된다. 이 문자열은 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(1) 등장하는 L의 개수와 R의 개수가 같다.

(2) 각 $1 \le k \le n$에 대하여 (왼쪽에서부터) 처음 k개의 문자열에는 L의 개수가 R의 개수보다 크거나 같다.

이제 이 두 조건을 만족하는 (길이가 n인) 임의의 문자열에 대하여, 이 문자열에 대응하는 좋은 순열을 유일하게 찾을 수 있음을 보이자. 실제로 (왼쪽에서부터) k번째 L과 k번째 R을 호로 연결하면 원하는 좋은 순열이 된다. 유일성을 보이기 위해서는 이 이외의 좋은 순열이 없다는 것을 보여야 한다. 즉, 좋은 순열을 그림 A와 같이 도식화할 때 다음 모양이 등장하지 않음을 보이면 된다.



모양 A

이것은 (좋은 순열의) 두 번째 조건과 동치이다. 실제로 모양 A가 나타난다면 $(a,b,c,d)=(i,j,k,l)$로 잡았을 때 두 번째 조건에 위배된다. 역으로 $a<b<c<d$이고 $\pi(a)>\pi(b)>\pi(c)>\pi(d)$라 하자. 이제 세 가지 경우로 나눠서 생각하자. 우선 $a>\pi(a)$이면 $\pi(b)<\pi(a)<a<b$를 얻으므로 $(i,j,k,l)=(\pi(b),\pi(a),a,b)$로 택하면 된다. 다음으로 $a=\pi(a)$이면 $\pi(c)<\pi(b)<\pi(a)=a<b<c$이므로 $(i,j,k,l)=(\pi(c),\pi(b),b,c)$로 택하면 된다. 마지막으로 $a<\pi(a)$라 하자. 만일 $b<\pi(b)$이면 $(i,j,k,l)=(a,b,\pi(b),\pi(a))$로 택하면 된다. 또한 $b\geq\pi(b)$이면 $\pi(d)<\pi(c)<\pi(b)\leq b<c<d$이므로 $(i,j,k,l)=(\pi(d),\pi(c),c,d)$로 택하면 된다.

종합하면 a_n은 위 두 조건을 만족하는 (길이가 n인) 문자열의 개수와 같다. 문자열에 등장하는 L의 개수를 k라 하면, R의 개수도 k이고 F의 개수는 $n-2k$이다. 먼저 F의 자리를 잡는 경우의 수는 $\binom{n}{n-2k}=\binom{n}{2k}$이고, F의 자리가 결정되고 나면 두 번째 조건을 만족시키도록 L과 R을 배치하는 것은, $(0,0)$에서 (k,k)까지 x축, y축과 평행한 직선을 따라 격자점을 이동하되 대각선을 넘지 않도록 하는 것과 마찬가지이다. (단, L은 오른쪽으로 한 칸, R은 위로 한 칸 이동하는 것에 대응된다.) 예를 들어, 그림 A에서 얻은 $LLLRRLRR$은 $(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),(3,1),(3,2),(4,2),(4,3),(4,4)$를 움직이는 경로에 대응된다. 이러한 경로의 개수를 세기 위해서는 대각선을 넘는 경로들을 모두 세는 것이 조금 더 수월하다. 만약 어떤 경로가 대각선을 넘는다면 반드시 $y=x+1/2$과 만나게 되므로 처음 만나는 점을 기준으로 이전의 경로를 $y=x+1/2$에 (선)대칭이동을 하면 원래의 경로가 $(-1,1)$에서 (k,k)로 이동하는 경로로 바뀐다. 즉, 대각선을 넘는 경로는 정확히 $(-1,1)$에서 출발하여 (k,k)에 도착하는 경로와 (일대일)대응이 되고, 따라서 대각선을 넘지 않는 경로의 수는 다음과 같다.

$$\binom{2k}{k}-\binom{2k}{k+1}=\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$$

따라서 다음을 얻는다.

$$a_n=\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{1}{k+1}\binom{n}{2k}\binom{2k}{k}$$

이제 이것을 근사하자. 우선 이항정리에 $x=1$을 대입하여 다음 식을 얻는다.

$$\sum_{r=0}^{2k}\binom{2k}{r}=2^{2k}$$

$\binom{2k}{k}$가 $\binom{2k}{r}$ 중에 가장 크고, $\binom{2k}{r}$이 모두 양수이므로 다음 부등식을 얻는다.

$$\frac{2^{2k}}{2k+1}\leq\binom{2k}{k}\leq 2^{2k}$$

따라서 원식에 대입하여 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k}2^{2k}\leq\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(k+1)(2k+1)}\binom{n}{2k}2^{2k}\leq a_n\leq\sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k}2^{2k}$$

한편

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k}2^{2k}=\frac{1}{2}((1+2)^n+(1-2)^n)=\frac{1}{2}(3^n+(-1)^n)$$

으로부터

$$\frac{3^n+(-1)^n}{2(n+1)^2}\leq a_n\leq\frac{3^n+(-1)^n}{2}$$

을 얻으므로 $\lim a_n^{1/n}=3$을 얻는다.